MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS - Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche - Fondata nel 1895 - Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 - 03 - 1999 - I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b - 37126 Verona - tel e fax (045) 8344785 - 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it - Stampa in proprio - Numero 72 – ottobre 2003

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
………………………………………

La trisettrice di Ippia

di Nazario Magnarelli

[*Segue dal numero 71*] **La quadratrice di Dinostrato**

La trisettrice di Ippia, come ha dimostrato Dinostrato (350 a.C. circa), si presta ad operare la rettificazione della circonferenza e la quadratura del cerchio; in tal caso essa è nota con il nome di *quadratrice di Dinostrato*. Teniamo sempre presente che la curva non è costruibile soltanto con riga e compasso. Per dimostrare questa proprietà, facciamo vedere che se indichiamo con (BD_R) l'arco BD rettificato e con ℓ la sua misura, sussiste la proporzione

$(BD_R) : AB = AB : AT$. (11)

Infatti, passando alle misure si ha:

$\ell : a = a : (2\,a / \pi)$, $\ell = a\,\pi / 2$; cioè $\ell = 2\,\pi\,a / 4$. (12)

Quindi la proporzione (11) è esatta perché essa ci fa ritrovare esattamente la lunghezza di $1/4$ di circonferenza, ossia $\ell = C/4$. La costruzione grafica del segmento di lunghezza ℓ si ottiene applicando il teorema di Talete. Infatti, scriviamo la (12) nella forma $(2a / \pi) : a = a : \ell$. Per eseguire una buona costruzione geometrica del fascio di rette parallele, prendiamo $a = 8u$, anziché $a = 9u$; quindi $2a / \pi \approx 5u$. Si ha la fig. 2 seguente:

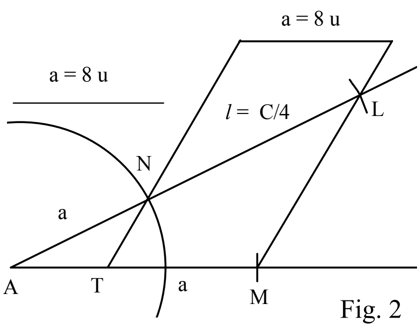
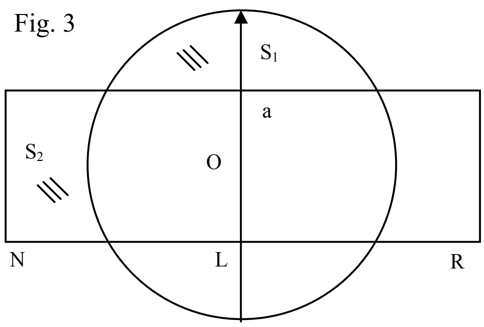


Fig. 2

Il segmento NL della figura è il segmento che rettifica $1/4$ di circonferenza di raggio $a = 8u$. Con ciò abbiamo completato il problema della rettificazione della circonferenza.
Per quanto riguarda la *quadratura del cerchio*, ricordiamo che l'area di un cerchio è equivalente a quella di un rettangolo avente per altezza il raggio e come base un segmento NR pari a mezza circonferenza rettificata. Si ottiene subito la costruzione che risolve il quesito (fig. 3). La figura ci dice che le superfici segnate S_1 ed S_2 sono equivalenti.

Fig. 3



Rimane da trasformare il rettangolo nel quadrato equivalente; la costruzione geometrica corrispondente si ottiene applicando i 1° o il 2° teorema di Euclide.

Insiemi infiniti non numerabili

di Ruggero Ferro

La somma e il prodotto di cardinalità numerabili non permettono di andar oltre il numerabile. Sicché viene naturale chiedersi se ci sono insiemi infiniti non numerabili.

Di fatto dimostriamo che la cardinalità dell'insieme dei sottoinsiemi di un insieme è strettamente maggiore della cardinalità dell'insieme dato, anche se questo è infinito. Questo risultato potrà poi essere usato per far vedere che la cardinalità dell'insieme dei numeri reali è strettamente maggiore di quella dei numeri naturali, mostrando che la cardinalità dei numeri reali è uguale alla cardinalità dell'insieme dei sottinsiemi dei numeri naturali.

TEOREMA (Cantor) Non esiste alcuna biiezione da un insieme X sull'insieme dei sottoinsiemi di X.

Dimostrazione.

Se X è un insieme finito, diciamo con n elementi, l'insieme dei suoi sottoinsiemi ha 2^n elementi e tra i due insiemi non può esserci alcuna biiettività.

Se invece X è infinito, sia f una qualsiasi funzione totale iniettiva da X in $P(X)$, l'insieme dei sottinsiemi di X: si dimostra che f non è suriettiva. Infatti il sottinsieme S di X così definito $S=\{x: x\in X$ e $x\notin f(x)\}$ non è nel codominio di f. Si noti che questo insieme S dipende dalla scelta di f. Se S fosse nel codominio di f allora questo sottinsieme S corrisponderebbe ad un elemento, diciamo x_0, di X, cioè sarebbe $S=f(x_0)$. Ma S non può essere $f(x_0)$ perché S differisce da $f(x_0)$ proprio per il possedere o meno l'elemento x_0. Di fatto, per definizione di S, $x_0\in S$ se e solo se $x_0\notin f(x_0)$, e S sarà diverso da $f(x_0)$. Sicché f non può essere suriettiva da X su $P(X)$, e, data l'arbitrarietà di f, non può esistere una biiettività da X su $P(X)$.

Con ciò la dimostrazione è conclusa, ma ci si potrebbe chiedere come mai Cantor si è inventato di scegliere proprio quell'insieme S per sviluppare la dimostrazione. Forse l'insieme S diviene una scelta naturale se si fanno le seguenti osservazioni.

Si rappresenti X come insieme di punti di una certa retta verticale. In corrispondenza di ciascun punto x di X cerchiamo di rappresentare il sottoinsieme $f(x)$ di X che la funzione totale e iniettiva f fa corrispondere a quel punto: ciò può essere fatto rappresentando come prima lo stesso insieme X, ma ora con una retta orizzontale all'altezza del punto x che si considera, e indicando quali elementi appartengono al sottoinsieme $f(x)$ e quali no, ad esempio cerchiando quelli che non appartengono a $f(x)$ e mettendo una croce su quelli che appartengono a $f(x)$. Senza ripetere tutte le linee orizzontali, indichiamo l'insieme X da cui scegliere i sottoinsiemi con una sola linea orizzontale, come si fa con gli assi nelle rappresentazioni del piano cartesiano, e ad ogni punto in ordinata facciamo corrispondere, alla stessa altezza, la successione di croci e tondi che rappresentano il sottoinsieme corrispondente a quel punto.

Nella figura 1 mettiamo in evidenza due elementi di X e come potrebbero essere le rappresentazioni dei sottoinsiemi che corrispondono tramite la f ai due elementi. Ora il problema è trovare un sottoinsieme di X diverso da tutti i corrispondenti tramite f agli elementi di X. Si noti che affinché due insiemi siano diversi basta che esista un elemento che appartenga a uno e non all'altro. Così per trovare un sottoinsieme di X diverso da tutti quelli che si è inteso rappresentare, cioè i corrispondenti agli elementi di X mediante la f, basta che sia diverso da uno di quei sottoinsiemi rispetto ad un elemento, e diverso da un altro rispetto ad un altro elemento. Per costruire un sottoinsieme S di X diverso da ciascuno di quelli nel codominio di f bisogna scegliere, per ciascuno di questi $f(x)$ con $x \in X$, un elemento che differenzi S da $f(x)$, cioè dal sottoinsieme corrispondente a x tramite f.

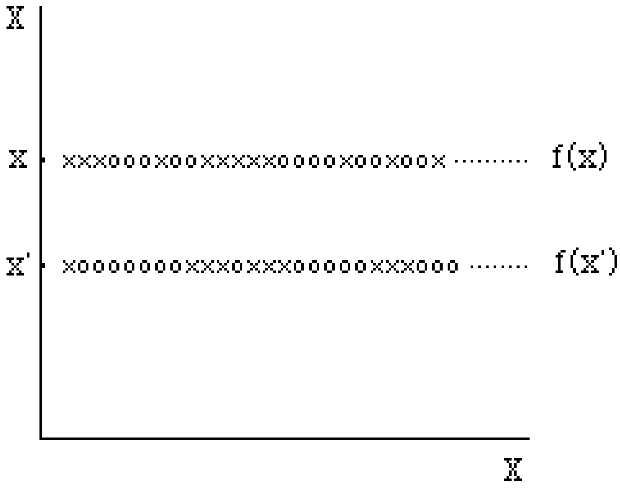


fig. 1

Un elemento caratteristico per ciascuno di questi $f(x)$ è proprio x, che è diverso da sottoinsieme a sottoinsieme nel codominio di f (fig. 2), addirittura è elemento individuativo del sottinsieme.

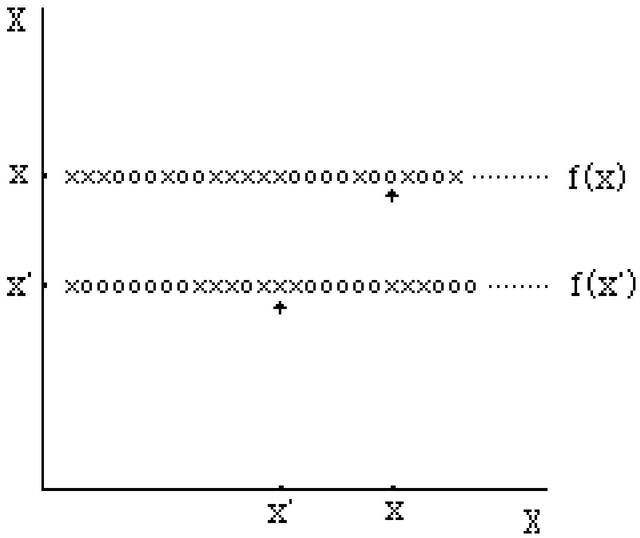


fig. 2

Ecco allora la scelta di differenziare il sottoinsieme S da ciascuno dei sottoinsiemi $f(x)$ nel codominio di f proprio mediante l'elemento x di X che individua il sottoinsieme $f(x)$. Ciò si può realizzare proprio mettendo in S l'elemento x se e solo se non appartiene al sottinsieme $f(x)$ individuato da x. Così sarà $S=\{x: x \in X \text{ e } x \notin f(x)\}$.

Si noti la peculiarità di questo metodo, per cui viene chiamato *metodo diagonale*: per vedere come comportarsi sull'elemento x si va a vedere cosa avviene lungo la diagonale (la bisettrice del quadrante) nel disegno riportato (fig. 3). Si noti anche quanto si è vicini ad un autoriferimento.

Si noti ancora come la definizione dell'insieme S dipende strettamente dalla funzione f, e quindi S è un insieme che può essere costruito solo avendo già precisato i sottoinsiemi di X corrispondenti agli elementi di X tramite f. In qualche modo bisogna già conoscere i sottoinsiemi di X (essi servono per definire f) per poter sapere chi è uno di essi: S. Questo fenomeno è noto come impredicatività dell'insieme dei sottoinsiemi, che, pur essendo vicino ad entrare in contrasto con l'assioma di fondazione introdotto per gli insiemi, non lo contraddice, ma piuttosto provoca una forte imprecisione in cosa si debba intendere per insieme dei sottoinsiemi.

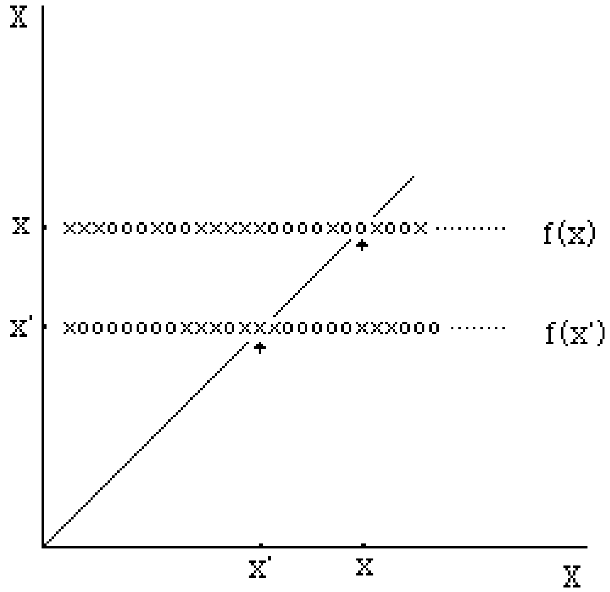
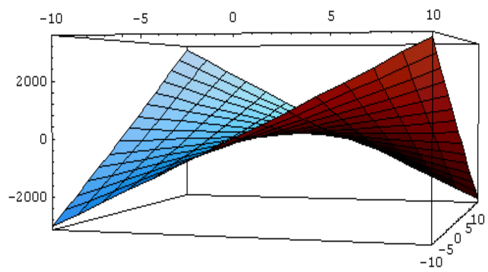


fig. 3



Tra matematica pura e matematica applicata la necessità fa la differenza

di Luciano Corso

Se guardiamo il corpo delle matematiche alla luce del vincolo della necessità, è indubbio che si distinguono due parti: quella della matematica libera da questo vincolo (oggi detta matematica pura) e quella che, invece, fa riferimento a esso (detta matematica applicata).

La necessità, presa come base di riferimento per distinguere le due parti della matematica, indirizza verso due condizioni non eludibili che accompagnano sempre chi vuol fare della matematica applicata; esse sono il vincolo temporale e quello delle risorse disponibili.

Come è noto, il matematico puro, di fronte a un problema, si pone sempre e solo due obiettivi: dimostrare in modo razionale se il problema ammette soluzione e, quindi, trovare un criterio di convergenza che consenta di raggiungerla. Si noti che il "consentire di raggiungerla" che abbiamo usato ha un significato essenzialmente astratto, nel senso che si ammettono criteri di convergenza a processo infinito.

Il matematico applicato non può essere soddisfatto da obiettivi simili e la ragione è che normalmente egli deve dare risposte ai problemi dell'uomo, qui e ora. Certo, sono pregevoli i due obiettivi esposti, ma insufficienti. In matematica applicata, occorrono due integrazioni essenziali:

1° è necessaria una risposta in tempo utile;

2° occorre tenere conto dei vincoli di risorse (sempre finiti, purtroppo) di cui si può disporre.

Il matematico applicato deve saper convivere sempre con un errore calcolabile, controllabile, voluto e pianificato spesso con la procedura che si è adottata.