MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 73 – novembre 2003

Schiuma quantistica e teoria delle stringhe

di Paolo Di Sia (*)

Le teorie che costituiscono i pilastri su cui poggia la fisica moderna sono la teoria della Relatività Generale (nel seguito abbreviata con RG) di Einstein, che riguarda la gravitazione e la Meccanica Quantistica (nel seguito abbreviata con MQ), che descrive il microcosmo. Tali teorie hanno avuto un innumerevole numero di verifiche sperimentali e tutte le loro previsioni sono state sperimentalmente confermate con un grado di precisione impensabile. Vi è però un grosso problema che le affligge: sono incompatibili tra loro. Quando infatti ci rivolgiamo ad esse in maniera separata, sembra a tutt'oggi che non sussistano problemi, ma i tentativi di unificazione hanno fornito nel corso degli anni risposte non sensate a domande scientifiche molto pertinenti. I problemi si mostrano in particolare con risultati infiniti che emergono dai calcoli effettuati considerando le equazioni della RG assieme a quelle della MQ.
Uno dei pilastri della MQ è il principio di indeterminazione; in base a tale principio tutto è soggetto alle fluttuazioni quantistiche, quindi anche il campo gravitazionale. Secondo la fisica classica il valore del campo gravitazionale nello spazio vuoto è zero. Ma in base alla MQ questo risulta essere solo un valore medio; il valore reale è un valore oscillante a causa delle fluttuazioni quantistiche. Inoltre il principio di indeterminazione conduce ad un aumento di tali oscillazioni se riduciamo le dimensioni delle regioni di spazio considerate. Dal momento che il campo gravitazionale si riflette sulla curvatura dello spazio, le fluttuazioni quantistiche conducono a distorsioni della forma dello spazio sempre più marcate al diminuire delle distanze.
L'ordine di grandezza sotto cui le fluttuazioni quantistiche danno seri problemi è costituito dalla lunghezza di Planck :

$$L_{Planck} = \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^3}} \approx 10^{-33}\ cm$$

A tale lunghezza corrisponde il tempo di Planck ($\approx 10^{-43}$ s), che è il tempo che la luce impiega a percorrere la lunghezza di Planck. A scale ultramicroscopiche, cioè per lunghezze inferiori a L_{Planck}, la struttura dello spazio-tempo non risulta liscia e regolare. Le ondulazioni casuali dovute agli effetti quantistici sono a tal punto pronunciate da non dare più l'idea di una geometria dotata di curvatura regolare. La trama dello spazio-tempo appare aggrovigliata, "in effervescenza", assai irregolare e le convenzionali nozioni di spostamento nelle tre dimensioni ordinarie (sinistra-destra, avanti-indietro, sopra-sotto (e anche prima-dopo per ciò che concerne il tempo)) perdono significato. Il fisico John Wheeler ha battezzato tale situazione **schiuma quantistica**. A livello ultramicroscopico, perciò, due tra gli elementi più significativi di RG e MQ (il principio di indeterminazione e il modello geometrico dello spazio-tempo) sembrano entrare in conflitto diretto.
La teoria delle stringhe è una teoria unificata dove il concetto di particella puntiforme viene sostituito con quello di oggetto unidimensionale esteso che vibra. Viene così aggiunto un nuovo livello microscopico alla vecchia progressione "atomo - costituenti atomici – quark". Secondo tale teoria le proprietà di una particella elementare (la sua massa e le sue cariche di gauge) vengono determinate dal modo di vibrazione della sua stringa interna. Pertanto ogni particella sarebbe in realtà una stringa e tutte le stringhe sono identiche. Le differenze visibili delle varie particelle nascono dai differenti modi di vibrazione di tali stringhe.

La teoria delle stringhe permette un superamento del problema legato alle forti fluttuazioni quantistiche di cui si è parlato in precedenza. Dalla teoria discende infatti che l'estensione della stringa comporta l'impossibilità di sondare la struttura di oggetti più corti della sua lunghezza, cioè di andare sotto la lunghezza di Planck. Il conflitto tra RG e MQ nasce proprio a causa di ciò che avviene a scale dell'ordine di L_{Planck}; se le stringhe, come costituenti elementari dell'universo, non possono sondare lunghezze inferiori a L_{Planck}, allora non vengono influenzate dalle forti fluttuazioni quantistiche. Per fare un semplice esempio, pensiamo di toccare con la nostra mano un oggetto ben levigato; a livello microscopico possiamo notare le sue irregolarità, ma la nostra mano non se ne accorge. Le stringhe non sono sensibili a caratteristiche "per loro microscopiche" , cioè non risentono di ciò che accade sotto L_{Planck}. Gli infiniti delle teorie quantistiche della gravitazione fondate sul concetto di particella puntiforme non sono presenti nella teoria delle stringhe. È opportuno fare anche la seguente osservazione: nel caso dell'esempio precedente della mano è possibile accertare la struttura microscopica dell'oggetto, mentre ciò sembra non valere nel caso delle stringhe, poiché in tale frangente risulta falsa la nozione secondo cui non vi è un limite spaziale inferiore circa la possibilità di "sondare" la natura. La teoria delle stringhe sembra fissare un limite inferiore di accessibilità delle distanze stabilendo che nessuna delle dimensioni spaziali può divenire minore di L_{Planck}. La teoria delle stringhe mostra perciò un limite alle possibilità di sondare l'universo; oltre tale limite la nozione comune di distanza perde significato. Vi è infatti una geometria nuova a tali distanze, la geometria quantica, su cui spero di poter ritornare in un prossimo intervento.

(*) disia@sci.univr.it

Triangoli e quadrati anomali

di Luciano Corso

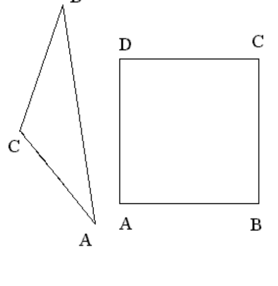

fig. 1

Consideriamo due semplici figure del piano euclideo: il triangolo e il quadrato [fig. 1].
Vi sono diverse definizioni di triangolo: esso è una figura piana, costituita da segmenti che chiudono uno spazio, avente 1) tre punti non allineati e tre lati costituiti da segmenti che uniscono i tre punti; 2) tre angoli interni la cui somma è di 180° (=

π rad). Il quadrato, invece, è una figura piana costituita da segmenti che chiudono uno spazio piano in modo da rispettare le seguenti condizioni: 1) i lati devono avere misura uguale; 2) gli angoli interni devono essere di 90°; 3) i lati sono 4.
Mentre i lati del triangolo possono avere misure diverse, la somma degli angoli interni del triangolo deve essere di 180°. Per il quadrato le proprietà fondamentali che lo caratterizzano sembrano essere proprio due: lati di misura uguale e angoli interni di 90°. La verifica di queste due proprietà impone che lo spazio su cui si lavora sia metrico.

A questo punto ci chiediamo ciò che può succedere ad un triangolo e a un quadrato se invece di essere tracciati su un piano euclideo, venissero tracciati su una superficie sferica o su una superficie cubica. In primo luogo conviene tenere conto che il concetto di segmento di retta nel piano euclideo non può essere usato per tracciare triangoli o quadrati in spazi con caratteristiche diverse dal piano. A ben vedere, però, il concetto di segmento di retta sul piano può essere sostituito da quello, più generale, di linea a minima distanza congiungente due punti. I segmenti di retta, infatti, godono di questa proprietà nello spazio piano. Allora l'equivalente di segmento di retta, nello spazio piano, è il segmento "curvo" di circonferenza a diametro massimo (arco) sulla superficie sferica e il segmento di linea spezzata sulla superficie cubica.

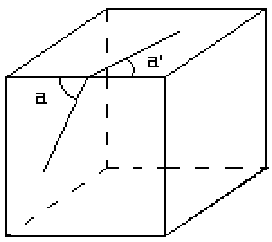

fig. 2. *Segmento «retto» tracciato su una superficie cubica*

Il vincolo geometrico da accettare, in questo caso, è che $\alpha = \alpha'$; cioè gli angoli opposti incidenti gli spigoli sono uguali (Si veda la fig. 2).

Si prendano i 3 punti A, B, C, non allineati, su di una superficie sferica (fig. 3), in modo che gli archi di circonferenza che li congiungono incidano tra di loro con angoli di 90° e che abbiano misure di lunghezza uguali: $|AB|=|BC|=|CA|$. La figura *ABC (fronte)* rappresentata sulla sfera non ha conservato le proprietà del triangolo piano così come le abbiamo definite sopra, essendo la somma degli angoli interni della figura di 270°, diversa dalla condizione $\sum angoli$=180°. Un triangolo sferico è un luogo geometrico chiuso tale che la somma degli angoli interni è maggiore di 180° (solo se il raggio della sfera tende a ∞ si verifica la condizione di uguaglianza). Su una sfera, il quadrato del piano euclideo, cioè quel luogo geometrico che presenta conservate le proprietà sopra esposte, è una figura che subisce una variazione e può arrivare ad avere, come in questo caso, 3 lati uguali (quelli che uniscono i punti A, B, C sulla sfera), invece di 4; perde, quindi, un lato-arco. Per il quadrato sferico, pare non rilevante, a questo punto, conservare la numerosità dei lati-archi. Allora nella sfera la traccia *ABC (fronte)* potrebbe essere interpretata come un "quadrato", non come un "triangolo" e ciò in quanto sono conservate alcune proprietà del quadrato euclideo sulla superficie sferica. Quindi, Il triangolo sferico *ABC (fronte)* ha 3 lati-arco, ma perde la proprietà che $\sum angoli$=180° e il quadrato sferico *ABC (fronte)* ha gli angoli interni di 90°, ma perde la proprietà che i lati siano 4. La figura *ABC (fronte)*, infatti, appare come triangolo e quadrato degeneri e coincidenti.

Vediamo, infine (fig. 4), cosa accade su una superficie di un cubo quando si vuole tracciare un luogo geometrico che conservi le proprietà di un quadrato (si lascia al lettore volonteroso il compito di vedere cosa accade con il triangolo).
Nell'ipotesi che la traccia dei lati di questo poligono segua un andamento parallelo agli spigoli del nostro cubo, si può vedere che, in genere, si forma una figura chiusa di ben 12 lati (primo lato OA, secondo AB e così via). Questa figura conserva le proprietà fondamentali che caratterizzano il luogo geometrico "quadrato"; esse, ripetiamolo, sono: uguaglianza delle misure dei lati e angoli di 90° tra i lati della figura. L'elemento che varia è la numerosità dei lati: in questo caso sono dodici.

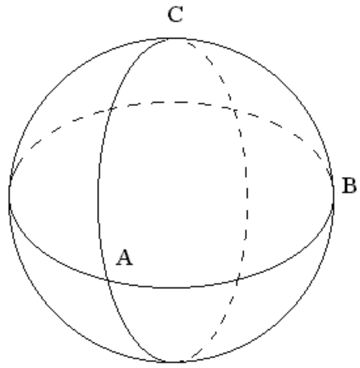

fig. 3. *Il luogo geometrico ABC (fronte), tracciato su questa superficie sferica, è un triangolo o un quadrato?*

Così un quadrato – inteso come luogo geometrico – ha 4 lati se lo spazio di supporto è il piano euclideo, può averne 3 se lo spazio di supporto è la superficie sferica e 12 se lo spazio di supporto è la superficie cubica.

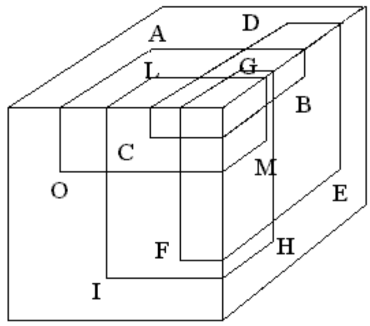

fig. 4. *Un "quadrato" strano; conserva l'ortogonalità dei lati e la costanza nella misura degli stessi, ma perde la numerosità dei lati.*

Perciò le caratteristiche invarianti del luogo geometrico "quadrato" sono "misura dei lati uguale" e "angoli interni di 90°". Non è invariante la numerosità dei lati.

Se partendo dal punto I tracciamo un quadrato con lato di lunghezza minore della distanza ortogonale tra I e il più vicino degli spigoli del cubo, otteniamo un quadrato euclideo; la lunghezza del lato e il tipo di spazio su cui viene tracciata la figura diventano importanti per la forma del quadrato che otterremo infine. Allora variazioni sensibili delle condizioni iniziali (nel nostro caso il punto di partenza e la lunghezza del lato) e la struttura dello spazio su cui avviene la traccia del quadrato diventano fondamentali per il risultato finale. Quando si è in queste situazioni si parla di sistema complesso, essendo la complessità afferente alle caratteristiche dello spazio su cui si lavora e alle condizioni iniziali del sistema.

Nota: *ABC (fronte)* indica che si considera il triangolo che appare sulla faccia visibile della sfera; e ciò per evitare ambiguità.

Bibliografia: [B.1] A. Vicentini, (2000) *Cenni di trigonometria sferica*, MatematicaMente n. 29, Verona. [B.2] H. Abelson, A. Disessa, (1986) *La geometria della tartaruga*, Muzzio editore, Padova.