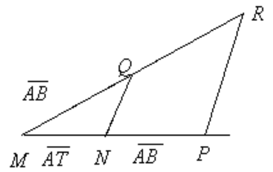
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 74 – dicembre 2003



Sulla curva di Ippia e di Dinostrato

di Silvio Maracchia [1]

Ho letto con piacere l'articolo di Nazario Magnarelli sulla curva di Ippia e Dinostrato [*MatematicaMente* n. 71]. Fatto salvo un eccessivo simbolismo (alcuni passaggi, inoltre, si sarebbero potuti eliminare), ricordare un glorioso risultato della matematica antica non può che farmi piacere.

Nell'articolo detto, manca, però, una collocazione storica della curva: come mai il sofista Ippia di Elide, del V secolo a. C., giunge alla curva andando oltre i canoni (poi esplicitamente indicati da Platone) consentiti dai costruttivisti greci? Ma, soprattutto, come riuscì Dinostrato a completare la proprietà trisettrice della curva mostrandone la possibilità di poter, con essa, quadrare il cerchio? Certamente non raggiungendo la proprietà (10) dell'articolo di Magnarelli nel modo da lui mostrato e cioè con la trigonometria e con un passaggio al limite!

Mi sembrerebbe allora interessante per i lettori di MatematicaMente poter osservare una antica e geniale proprietà su cui molto potrebbe dirsi dal punto di vista storico, specialmente per il suo contributo allo sviluppo della matematica.

La dimostrazione cui accennerò è sostanzialmente quella che ci ha tramandato Pappo di Alessandria (III – IV secolo d. C.) ed è quella molto probabilmente di Dinostrato (fratello del più importante Menecmo di Proconneso, entrambi allievi di Eudosso di Cnido, amico, checché dicano alcuni storici, di Platone). Per semplicità riprendo la stessa figura di Magnarelli (fig. 1).

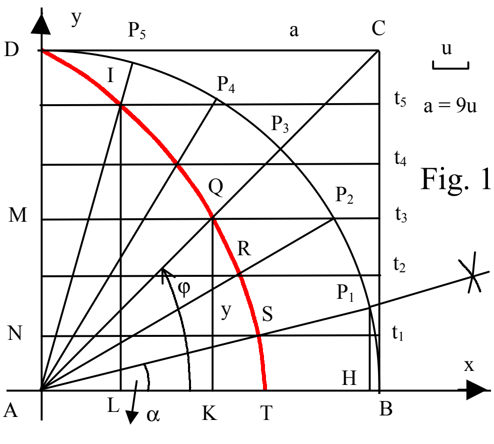


Fig. 1

La curva viene definita con la proporzione:

$$\widehat{BP_3}:\widehat{BD}=\overline{QK}:\overline{DA} \quad , \quad \forall Q \text{ della curva} \qquad (1)$$

Questa proporzione (in cui gli archi BP_3 e BD hanno un rapporto che può essere sostituito con quello dei rispettivi angoli al centro $B\hat{A}P_3$ e $B\hat{A}D$) mostra la *diretta proporzionalità* tra gli archi (o angoli) descritti dal raggio AB che ruota attorno ad A, e i segmenti Bt_3 corrispondenti. Ciò consente, come è detto nell'articolo di Magnarelli, una facile trisezione dell'angolo $B\hat{A}P_3$ (basta dividere Bt_3 in tre parti uguali, far ricorso alla nostra curva DQT, ottenendo $P_1\hat{A}B=P_2\hat{A}P_1=P_3\hat{A}P_2$).

La proprietà dimostrata da Dinostrato è poi la seguente:

$$\widehat{BD}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{AT} \qquad (2)$$

ed è questo il grande risultato dell'antico matematico. Il fatto che un arco di circonferenza (BD) si possa mettere in relazione con tre segmenti porta naturalmente alla sua rettificazione e quindi, essendo quest'arco un quarto di circonferenza, anche alla rettificazione dell'intera circonferenza e dunque alla quadratura del cerchio.

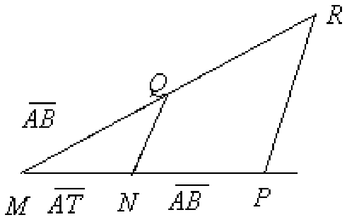


fig. 2

$$\overline{AT}:\overline{AB}=\overline{AB}:\widehat{BD} \qquad (2')$$

Con $MN = AT$, $MQ = NP = AB$ si ha che il segmento QR, quarto proporzionale, è uguale all'arco (BD) quarto proporzionale nella (2'). Inoltre, scritta la (2) nella forma

$$\overline{AT}=\left(\overline{AB}\cdot\overline{AB}\right)/\widehat{BD} \quad \left(\widehat{BD}=circonferenza/4 \quad cioè \quad c/4\right) \qquad (2'')$$

con $\overline{AB}=a$ (per seguire Magnarelli), si ottiene

$$\overline{AT}=a^2/(c/4)=4\cdot a^2/c$$

che è proprio la formula (10) dell'articolo di Magnarelli, se si tiene presente che è $c=2\cdot\pi\cdot a$.

Ma come è stata dimostrata la (2) ? Questo è il punto, ed è un punto interessante poiché la tecnica usata (riduzione all'assurdo) è assai sofisticata.

Forse questa antica dimostrazione, che non fa uso naturalmente né della trigonometria, né di assi cartesiani o di equazioni polari o non polari, potrebbe interessare i lettori di MatematicaMente; in tal caso la scriverò in una mia futura lettera.

[1] Docente di Storia della Matematica, Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi "La Sapienza" di Roma

La "traversata del deserto"

di Arnaldo Vicentini

Giorni fa mi sono imbattuto in questo quiz:

«Affronterò la "traversata del deserto", che è largo 800 km e privo di distributori di carburante, con un camion che ne porta al massimo per 500 km. Allo scopo, con viaggi preliminari, preparerò lungo il percorso dei depositi di carburante che mi serviranno nell'ultimo viaggio di sola andata. Preparativi compresi, quanti rifornimenti dovrò fare alla base di partenza? E quanti chilometri dovrò percorrere?"

Mi sono allora ricordato d'aver letto un quiz simile quasi vent'anni fa nella rubrica "(Ri)creazioni al calcolatore" della rivista "Le Scienze" (diretta allora da Felice Ippolito). Si intitolava «La Volpe del Deserto». Il problema era rovescio. La "Volpe", braccata dal nemico, disponeva di carburante a volontà: ma per sottrarsi al nemico, si sarebbe inoltrata nel deserto il più profondamente possibile con una *jeep* che non poteva trasportare più di *tot* litri di carburante. Una complicazione in più era costituita dal fatto che il consumo specifico della *jeep* dipendeva dal carico. Occorreva dire a quale distanza massima dalla base poteva giungere la “Volpe”. Siccome ora quel quiz non lo ricordo con precisione, propongo il quiz di sopra; ma mi pare più interessante discuterne la generalizzazione.

Problema **D**[iretto]. «Partendo da P, devo arrivare in A che dista t da A, con un veicolo a consumo specifico costante che può rifornirsi per percorrere non più di $p < t$. Mi posso rifornire in P quante volte voglio; e posso predisporre depositi di energia (a spese dell’autonomia) in punti strategici per eventuali rifornimenti *in itinere*. Quale strategia adotterò per conseguire il minimo impiego di energia?»

Per comodità di espressione, adottiamo come unità di misura dell’energia di locomozione il consumo specifico del veicolo facendo così coincidere i quantitativi d’energia con le rispettive lunghezze percorribili. Rovesciamo per un attimo il problema ponendolo in questi altri termini:

Problema **R**(ovescio). «Prelevando n volte in P il quantitativo p, di cui $n–1$ volte per andare a costituire depositi nei punti avanzati $P_1, P_2, ..., P_{n–1}$, qual è la massima distanza $d(n)$ di cui mi posso allontanare da P nell’ultimo viaggio di sola andata? A quali intervalli di distanza x_k $(k = 1, 2, ..., n–1)$, porrò i punti di eventuale rifornimento *in itinere*? E quanto sarà il quantitativo q_k da depositare in P_k?» Ovviamente, il costo complessivo vale comunque np.

Dimostriamo che risulta:

– Distanza massima: $d(n) = [1+1/3+...+1/(2n-1)]\cdot p$; (1)
– Intervalli tra depositi successivi: $x_k = p / [2(n–k)+1]$; (2)
– Quantitativi depositati: $q_k = p–2x_k$, $(k=1, 2, ..., n–1)$. (3)

Per $n = 1$ la (1) va bene perché dà $d(1) = p$.

Supponiamo $n = 2$. In un primo viaggio raggiungo P_1 distante x_1 da P, vi costituisco il deposito q_1 e ritorno in P. Il q_1 ottimo vale senz’altro $p – 2x_1$. Nel secondo viaggio, arrivo in P_1 con una riserva $p – x_1$. Il massimo di cui posso rifornirmi è x_1. Per non sprecare, deve essere $q_1 = p – 2x_1 \leq x_1$, cioè $x_1 \geq p / 3$. Riparto con una riserva $x_2 = (p–x_1)+(p–2x_1) = 2p–3x_1$ con cui raggiungerò P_2 distante $d(2) = x_1+2p–3x_1= 2(p–x_1)$ da P. La distanza massima si ha per x_1 minimo, cioè $x_1 = p/3$, e quindi $x_2 = p$. Allora $d(2) = 2(p–p/3) = 4p/3 = p/3 + p$. E le (1), (2) e (3) valgono per $n = 2$.

Passiamo al caso $n = 3$. Costituirò due depositi: uno in P_1 a distanza x_1 da P, l’altro più avanti in P_2 a distanza x_2 da P_1. Il primo deposito vale $p–2x_1$. Nel secondo viaggio ne preleverò la parte x_1, (ripristinando il pieno p), depositerò in P_2 la parte $p–2x_2$, ritornerò esaurito in P_1 dove preleverò x_1 per poter tornare in P, ma dove lascerò ancora x_1 che mi servirà nel terzo viaggio per sopperire a quanto consumato. L’ottimo x_1 è dunque tale che $q_1 = p–2x_1 = 3x_1$. Pertanto, $x_1 = p/5$. Nel terzo e ultimo viaggio riparto da P_1 diretto verso P_2 distante x_2 da P_1 col pieno p. L’ottimo sarà trovare in P_2 quanto consumato per giungervi, ossia $q_2 = p – 2x_2 = x_2$, in modo da poter ripartire col pieno p. Dovrà quindi essere $q_2 = x_2 = p/3$. Le (1), (2) e (3) valgono anche per $n=3$ in quanto $d(3) = x_1+x_2+p = p/5+p/3+p$.

Nel caso generale, ($n = m$, con $m > 3$), osservo che il primo tratto x_1 è percorso sia in andata che al ritorno in ognuno degli $m–1$ viaggi preliminari e nell’ultimo viaggio: $2m – 1$ volte in tutto. In ogni viaggio successivo al primo, q_1 dovrà servire in andata per ripristinare il pieno p sopperendo al consumato x_1, e al ritorno per permettere, a riserva esaurita, di percorrere il tratto residuo che è ancora x_1. Dovrà dunque essere $p = (2m–1)x_1$, ossia $x_1 = p/(2m–1)$. Osservo inoltre che nell’ultimo viaggio riparto da P_1 verso P_2 col pieno p, cioè nelle stesse condizioni in cui sarei partito da P per l’ultimo viaggio nel caso $n = m–1$. Pertanto, se la (1) vale per $n = m–1$, vale anche per $n = m$; e in definitiva per ogni n naturale. Con ciò, le risposte al problema **R** sono proprio le (1), (2) e (3). Infine, posso fare $d(n)$ grande a piacere se n è abbastanza grande. Infatti, detta $H(n)=1+1/2+ ... + 1/n$ la somma dei primi n termini della *serie armonica*, si ha:

$$d(n)/p = H(2n) – H(n) / 2, \tag{4}$$

È noto che:

$$[n\to\infty] \Rightarrow \{[H(n) – ln(n)] \to \gamma = costante > 0\} ,$$

dove $\gamma = 0,57721566490...$ Di conseguenza:

$$[n \to \infty] \Rightarrow [d(n) / p – ln(n) / 2] \to \gamma / 2 + ln(2) = 0,98170…$$

Torniamo ora al problema **D**. La sua soluzione, tenendo presente quanto inferito discutendo il problema **R**, è possibile per ogni arbitrario t (grande a piacere). Basta infatti:

a) determinare n tale che sia $d(n\text{-}1) < t$ e $d(n) \geq t$;
b) porre $r = t/d(n) \leq 1$ e ridimensionare con tale fattore le quantità p, x_k e q_k.

Per il quiz iniziale della ***traversata del deserto*** ($t=800$; $p=500$), si trova:

$d(3) = 500\cdot(1/5+1/3+1) = 500\cdot23/15 = 766,(6) < 800$;
$d(4)=500\cdot(1/7+1/5+1/3+1)=500\cdot176/105=838,(095238)>800$;
$n = 4$; $r = t/d(4) = 21/22 = 0,9(54)$;
$x_1=rp/7=68,(18)$; $x_2=rp/5=95,(45)$; $x_3=rp/3 =159,(09)$
Consumo complessivo: $4rp = 1909,(09)$.

La redazione di MatematicaMente augura a tutti un

sereno 2004.

Malgrado gli accidenti umani e i casi della vita, sia esso portatore di forza interiore; così potremo sempre sorridere e stupire gli dei invidiosi.

La cardinalità dell'insieme dei numeri reali

di Ruggero Ferro

Con il teorema di Cantor a disposizione, si può affrontare il problema di determinare la quantità dei numeri reali.

Si dimostrerà che essi sono tanti quanti i sottoinsiemi dei numeri naturali attraverso vari passaggi. Anzitutto ai numeri reali si assoceranno i punti di una retta mediante il noto metodo delle coordinate, e questa corrispondenza è una biiettività in base alle nozioni di retta e di numeri reali a cui si fa riferimento. Poi si mostrerà che i punti di una retta sono tanti quanti i punti di un segmento aperto, ad esempio del segmento $(0,1)$. Si tornerà quindi, sempre grazie al metodo delle coordinate, all'insieme $\{x: x\in \boldsymbol{R}$ e $0 < x < 1\}$ di numeri reali, e si considereranno le rappresentazioni in notazione binaria infinita di questi numeri studiando il rapporto che c'è tra i numeri reali maggiori di 0 e minori di 1 e le loro notazioni binarie infinite (Si noti che una qualsiasi notazione binaria finita può essere considerata infinita completandola con simboli sempre 0 e la nuova successione rappresenta lo stesso numero di quella finita). Le notazioni binarie infinite dei numeri reali maggiori di 0 e minori di 1 da dopo la virgola sono successioni infinite di simboli che sono o il simbolo 0 o il simbolo 1, e quindi sono tante quante queste successioni. Infine si dimostrerà che queste successioni sono tante quante i sottoinsiemi dei numeri naturali. I vari passi sopra esposti non ancora giustificati verranno presentati indipendentemente, ma non esattamente nello stesso ordine indicato, per mettere in risalto i punti dove possono esserci delle maggiori difficoltà.

TEOREMA A: I punti della retta sono tanti quanti i punti di un segmento tra due punti diversi esclusi gli estremi (in particolare del segmento che va dal punto di coordinata 0 escluso, al punto di coordinata 1 escluso).

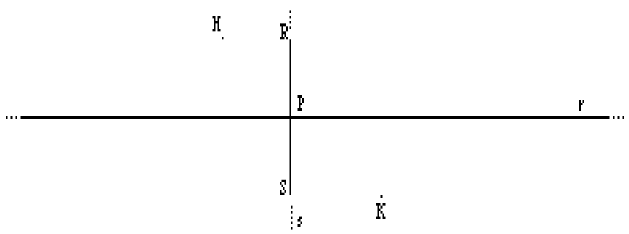


fig. 1

Dimostrazione: Sia data una retta r [fig. 1] e su di essa si fissi un punto P. [*Segue al numero 75*]