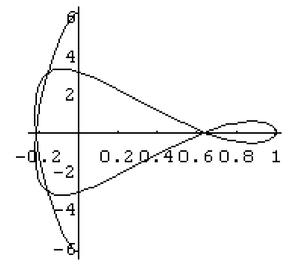
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 75 – gennaio 2004



La cardinalità dell'insieme dei numeri reali

di Ruggero Ferro [1]

[segue dal n. 74} (dimostrazione) […] Si posizioni il segmento RS, estremi esclusi, considerato perpendicolarmente alla retta, intersecandola nel punto P e in modo che P sia anche il punto medio dell'intervallo [fig.1, MatematicaMente n. 74]. Si considerino poi i due punti H e K uno sulla parallela alla retta r per il punto R e l'altro sulla retta parallela sempre alla retta r ma per il punto S in modo che siano da parti diverse della retta s che contiene il segmento RS. Ora si consideri la funzione ϕ che ad ogni punto X della retta r che sta nel semipiano determinato dalla retta s che contiene K associa il punto X' del segmento PR intersezione di questo segmento con la retta per i punti H e X, e che ad ogni punto Y della retta r che sta nel semipiano determinato dalla retta s che contiene H associa il punto Y' del segmento PS intersezione di questo segmento con la retta per i punti K e Y, e che a P associa P stesso.

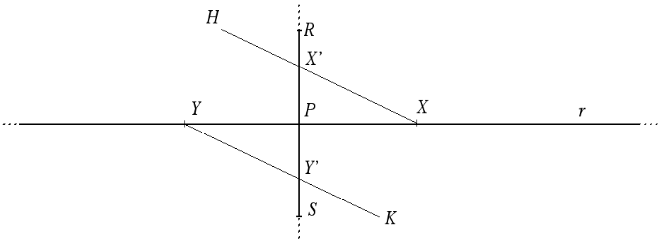


fig. 2

La funzione ϕ così definita è una biiettività dalla retta r sul segmento RS (Lo si dimostri per esercizio).

TEOREMA B. Le successioni infinite di simboli 0 e 1 sono tante quanti i sottoinsiemi dei numeri naturali.

Per successione infinita si intende un insieme totalmente ordinato le cui posizioni nell'ordine sono in una biiettività che preserva l'ordine con i numeri naturali. Si dice che una biiettività f da un insieme ordinato in un altro preserva l'ordine se ad un elemento, a, più grande (nell'ordine del primo insieme) di un altro, b, fa corrispondere un elemento, $f(a)$, più grande (nell'ordine del secondo insieme) del corrispondente, $f(b)$, dell'altro elemento, b.

Dimostrazione: Data una qualsiasi successione infinita $s = (h_0, h_1, ..., h_i, ...)$ di simboli 0 e 1 (cioè ogni h_i è o 0 o 1) le si associ il seguente sottoinsieme di naturali $X_s=\{n: h_n = 0\}$ cioè l'insieme di tutte le posizioni in cui nella successione infinita s c'è uno 0. Questo modo di associare sottoinsiemi dei naturali alle successioni infinite di 0 e 1 è una funzione ψ biiettiva dall'insieme delle successioni infinite di 0 e 1 all'insieme dei sottoinsiemi dei naturali. Infatti, i) è totale perché per ogni successione infinita c'è un unico sottoinsieme dei naturali associatole; ii) è iniettiva perché se s e s' sono successioni infinite diverse (in almeno una posizione i in una c'è 0 e nell'altra c'è 1) allora i corrispondenti insieme X_s e $X_{s'}$ sono diversi (il numero i appartiene a uno e non all'altro); e iii) è suriettiva perché dato un qualsiasi sottoinsieme A dei naturali la successione infinita s^* così definita: nella i-esima posizione di s^* (in h_i) c'è 0 ($h_i = 0$) se e solo se il numero i appartiene ad A ($i \in A$) è tale che il sottoinsieme dei naturali che le è associato è proprio A.

Data la biiettività della funzione ψ, l'insieme delle successioni infinite di simboli 0 o 1 e quello dei sottoinsiemi dei numeri naturali sono equinumerosi.

A questo punto si vogliono confrontare l'insieme dei numeri reali maggiori di 0 e minori di 1 con l'insieme delle loro rappresentazioni in notazione binaria infinita. La difficoltà sta nel fatto che ci sono numeri reali che hanno più rappresentazioni in notazione binaria infinita. Di fatto due rappresentazioni che abbiano le stesse cifre binarie (o 0 o 1) fino ad una certa posizione i e poi una prosegue con un 1 seguito da tutti 0 (è del tipo $0,h_0...h_i1000$ ...) mentre l'altra prosegue con uno 0 seguito da tutti 1 (è del tipo $0,h_0...h_i0111...$) rappresentano lo stesso numero. Infatti, se si indica con r_1 il numero rappresentato dalla prima notazione e con r_2 il numero rappresentato dalla seconda notazione ($r_1 = 0,h_0...h_i1000...$ e $r_2 = 0,h_0...h_i0111...$), troncando la notazione di r_1 alla j-esima cifra dopo la virgola, per un qualsiasi numero naturale j tale che da lì in poi nella notazione di r_1 ci sono tutti 0, si ottiene una notazione dello stesso numero r_1, mentre troncando la notazione di r_2 alla j-esima cifra dopo la virgola si ottiene una approssimazione per difetto di r_2 a meno di $1/2^j$, sicché la differenza $r_1–r_2$ può essere approssimata per eccesso a meno di $1/2^j$ dalla differenza delle due successioni finite di cifre 0 o 1, e questa differenza è esattamente $1/2^j$. Così $r_1 \geq r_2$ e, essendo la differenza $r_1–r_2$ tra i due numeri sia maggiore o uguale a zero che minore di ogni numero del tipo $1/2^j$ per qualunque numero naturale j, i due numeri saranno uguali, $r_1 = r_2$, dal momento che l'unico numero reale maggiore o uguale a zero e minore di ogni numero razionale è zero.

Così si è visto che i numeri reali maggiori di zero e minori di uno che ammettono una rappresentazione in notazione binaria finita ammettono due rappresentazioni in notazione binaria infinita. Si vede facilmente che non ci sono altre notazioni per rappresentare questi numeri perché le differenze non sarebbero nulle, e, per questo stesso motivo, anche i numeri reali maggiori di zero e minori di uno che non ammettono rappresentazioni in notazione binaria finita hanno un'unica notazione binaria infinita che li rappresenti.

In tal modo, associando ai numeri reali rappresentabili con due notazioni binarie infinite solo quella le cui cifre sono sempre 0 da un certo punto in poi, si ottiene una corrispondenza biiettiva tra tutti i reali e le successioni infinite di 0 o 1 che non siano sempre 1 da un certo punto in poi. Pertanto l'insieme delle successioni infinite di 0 o 1 è equinumeroso all'insieme dei numeri reali unito all'insieme delle successioni infinite di 0 o 1 che sono sempre 1 da un certo punto in poi.

Si è così pervenuti ad affermare che la cardinalità dell'insieme S_{inf} delle successioni infinite di 0 o 1 è uguale alla somma delle cardinalità dell'insieme R dei numeri reali più la cardinalità dell'insieme S_1 delle successioni infinite di 0 o 1 che è sempre 1 da un certo punto in poi. Sappiamo già che la cardinalità di S_{inf} è uguale alla cardinalità dell'insieme dei sottoinsiemi dei numeri naturali, e, per calcolare la cardinalità dell'insieme R dei reali (che si sta cercando), serve conoscere la cardinalità dell'insieme S_1 delle successioni infinite di 0 o 1 che sono sempre 1 da un certo punto in poi.

Per calcolare la cardinalità dell'insieme S_1 si osservi anzitutto che le successioni infinite di 0 o 1 che sono sempre 1 da un certo punto in poi sono tante quante le successioni finite di 0 o 1 ottenute dalle prime troncandole dove iniziano ad essere sempre 1, e così si ottengono tutte le successioni finite di 0 o 1. Sicché per calcolare la cardinalità di S_1 ci si è ricondotti a calcolare la cardinalità dell'insieme S_f delle successioni finite di 0 o 1. Queste si possono dividere negli insiemi $S_{f,i}$ tra loro a due a due disgiunti delle successioni finite di 0 o 1 di lunghezza i, per ogni numero naturale i. Evidentemente ogni singolo insieme $S_{f,i}$ è finito, e questi insiemi sono tanti quanti i numeri naturali, sicché la cardinalità della loro unione sarà minore od uguale alla cardinalità di una unione di un numero numerabile di insiemi numerabili a due a due disgiunti, e si sa già che questa cardinalità è il prodotto della cardinalità di $\boldsymbol{N}$ per $\boldsymbol{N}$, che è ancora la cardinalità di $\boldsymbol{N}$. Concludendo questo calcolo si può dire che la cardinalità dell'insieme S_1 delle successioni infinite di 0 o 1 che sono sempre 1 da un certo punto in poi è uguale alla cardinalità dell'insieme dei numeri naturali.

Così si è pervenuti alla seguente situazione: la cardinalità dell'insieme dei sottoinsiemi dei naturali è uguale (alla cardinalità dell'insieme S_{inf} delle successioni infinite di 0 o 1, che è uguale alla somma delle cardinalità dell'insieme dei numeri reali più la cardinalità dell'insieme delle successioni infinite di 0 o 1 che sono sempre 1 da un certo punto in poi, che è uguale) alla somma delle cardinalità dell'insieme dei numeri reali e dell'insieme dei numeri naturali, cioè $|P(\boldsymbol{N})| = |\boldsymbol{R}| + |\boldsymbol{N}|$.

Poiché si sa che la somma di due cardinalità infinite è uguale alla cardinalità massima delle due, si ha che $|\mathrm{P}(\boldsymbol{N})| = max(|\boldsymbol{R}|, |\boldsymbol{N}|)$; e poiché $|\boldsymbol{N}| < |\boldsymbol{R}|$, dovrà essere $max(|\boldsymbol{R}|,|\boldsymbol{N}|) = |\boldsymbol{R}|$, cioè $|P(\boldsymbol{N})| = |\boldsymbol{R}|$, che è ciò che si voleva dimostrare.

[1] Docente di Logica Matematica, Facoltà di Scienze. MM. FF. NN. – Corso di Informatica - Università degli Studi di Verona

Questo numero di MatematicaMente
è stato realizzato grazie al contributo del
Comune di Verona
Assessorato alla Cultura

Osservazioni sui numeri periodici

Luigi Landra

Siamo abituati a considerare i numeri periodici come semplice alternativa delle corrispondenti frazioni generatrici senza soffermarci sulle loro peculiarità. Come qui di seguito verrà precisato, essi presentano degli aspetti curiosi che non possono non destare il nostro interesse. Come si vedrà, i numeri periodici, nei possibili infiniti sistemi di numerazione, sono accidenti non sempre associati allo stesso numero razionale.

Come è noto, un numero con virgola (decimale o non) si dice periodico quando ha un numero di cifre infinito dopo la virgola nel quale però si riscontra la ripetizione, nello stesso ordine, di una, due o un generico numero finito di cifre. È un numero razionale poiché di esso è possibile trovare la relativa frazione generatrice. Ci sono anche dei numeri periodici che hanno un insieme di cifre che si trovano subito dopo la virgola e non si ripetono più: esse costituiscono l'antiperiodo del numero periodico.

Inoltre, come tutti i libri di aritmetica affermano, la frazione generatrice di un numero periodico ha per numeratore il numero formato da tutte le cifre che precedono il periodo seguite da quelle del periodo meno il numero formato dalle cifre che precedono il periodo e ha per denominatore un numero formato da tanti nove quante sono le cifre del periodo seguito da tanti zeri quante sono quelle dell'antiperiodo. Ecco due esempi con l'applicazione della regola che è stata appena richiamata:

$$1,(13) = \frac{113-1}{99} = \frac{112}{99} \quad ; \quad 3,45(23) = \frac{34523-345}{9900} = \frac{34178}{9900}$$

Ora, applicando la suddetta regola al numero periodico $0,(9)$, cioè $(9\text{-}0)/9$, si ottiene sorprendentemente il numero intero 1. Volendo verificare il risultato, chiamando $x = 0,(9)$, si può scrivere l'equazione: $10x = 9,(9)$, ossia $10x = 9 + 0,(9)$; $10x = 9 + x$; $9x = 9$; $x = 1$. Procedendo allo stesso modo si verifica che $1,(9) = 2$, $2,(9) = 3$, ecc. Queste osservazioni ci portano a concludere che anche tutti i numeri naturali si possono scrivere sotto forma di numeri periodici.

Se poi si prendono in considerazione dei numeri periodici con antiperiodo qualsiasi e 9 come periodo, si ottengono numeri con virgola finiti che hanno però l'ultima cifra a destra dell'antiperiodo aumentata di una unità. Ecco un esempio:

$$4,5(9) = \frac{459-45}{90} = \frac{414}{90} = \frac{23}{5} = 4,6 \ .$$

I numeri con virgola finiti si possono considerare numeri periodici con periodo zero, come si constata con il seguente esempio:

$$4,5(0) = \frac{450-45}{90} = \frac{405}{90} = \frac{45}{10} = 4,5 \ .$$

Si può dunque dedurre che ogni numero naturale si può considerare periodico con periodo zero. Infatti:

$$4,(0) = \frac{40-4}{9} = \frac{36}{9} = 4 \ .$$

Da quanto sopra esposto, si ha che $3,(9) = 4,(0)$, poiché ambedue sono corrispondenti al numero naturale 4.

Da ultimo è il caso di sottolineare che il numero che risulta periodico è un accidente correlato al tipo di numerazione che si utilizza per rappresentare i numeri razionali.

Il fatto che un razionale non intero sia rappresentato con un numero finito di cifre ossia con periodo (0) o abbia invece rappresentazione periodica con periodo diverso da (0) dipende esclusivamente dalla base scelta per la numerazione [Se la base è 10, le cifre dopo la virgola sono decimi, centesimi, ecc.; se è 2 sono mezzi, quarti, ecc.; se la base è $n > 1$, sono n-esimi, n^2-esimi, ecc.]. Vediamo ora i possibili casi che mettono in evidenza le proprietà descritte utilizzando prima numeri razionali rappresentati con la numerazione decimale e poi gli stessi rappresentati con un'altra numerazione:

1) Numero rappresentato da una sequenza limitata di cifre corrispondenti a parte di unità sia in numerazione decimale che in numerazione binaria:
   a) Numerazione decimale: $1/4 = 0,25$
   b) Numerazione binaria: $1/100 = 0,01$.
2) Numero rappresentato da una sequenza limitata di cifre corrispondenti a parte di unità in numerazione decimale e, invece, lo stesso numero rappresentato da una sequenza illimitata di cifre corrispondenti a parte di unità in numerazione binaria:
   a) Numerazione decimale: $1/5 = 0,2$
   b) Numerazione binaria: $1/101 = 0,(0011)$
3) Numero rappresentato da una sequenza illimitata di cifre corrispondenti a parti di unità sia in numerazione decimale che in numerazione binaria:
   a) Numerazione decimale: $1/6 = 1,1(6)$
   b) Numerazione binaria: $1/110 = 0,0(01)$.
4) Numero rappresentato da una sequenza illimitata di cifre corrispondenti a parte di unità in numerazione decimale e, invece, da una sequenza limitata di cifre corrispondenti a una parte di unità in numerazione ternaria:
   a) Numerazione decimale: $1/3 = 0,(3)$
   b) Numerazione ternaria: $1/10 = 0,1$.

Non è possibile, in quest'ultimo caso, utilizzare la numerazione binaria per ottenere una sequenza limitata di cifre in quanto 3 non è divisore di 2. Infatti, abbiamo un numero rappresentato da una sequenza illimitata di cifre corrispondente a parte di unità soltanto se utilizziamo una frazione nella quale uno o più fattori del denominatore non dividono la base della numerazione scelta.

Punti di accumulazione

Nelle prove scritte dei concorsi, quando uno si accorge di avere tante cose da dire non c'è più tempo per farlo. La fine dell'ultimo minuto è un «punto di accumulazione» delle consegne. Così è l'uomo, nella prova della vita.