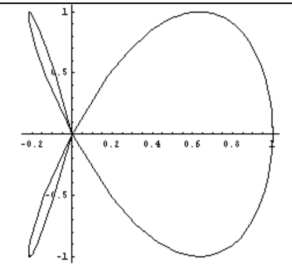
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 76 – febbraio 2004



La principale proprietà della curva di Ippia e Dinostrato

di Silvio Maracchia [1]

Facendo seguito all'articolo di N. Magnarelli (MatematicaMente nn. 71, 72) e al mio successivo (n. 74), mostrerò questa volta la proprietà fondamentale della curva di Ippia e Dinostrato (già vista negli articoli precedenti) secondo la dimostrazione di quest'ultimo nella versione datane da Pappo di Alessandria (collezione, IV, propp. 30-32).

Per rendere questo articolo indipendente, ricordo che si considera il quadrato $ABCD$ (fig. 1); mentre BC si sposta parallelamente a se stesso sino a sovrapporsi con AD, nello stesso tempo BC ruota attorno a B sino a sovrapporsi con BA; moti entrambi uniformi (Nella definizione usuale, si pensa di far cadere AD su BC, mentre BA ruota in senso orario attorno a B in modo che A descriva l'arco AC, quarta parte della circonferenza).

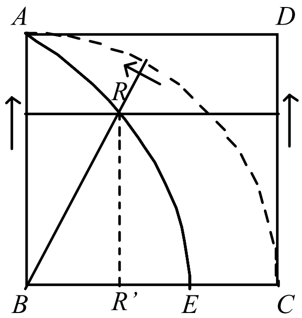


fig. 1

La curva di Ippia è il luogo dei punti R di intersezione dei due lati in movimento nelle posizioni che raggiungono nello stesso istante. Si determina così una diretta proporzionalità tra gli angoli CBR descritti e i segmenti RR' corrispondenti. La definizione si traduce nella relazione

$$C\hat{B}R : C\hat{B}A = RR' : AB \quad . \tag{1}$$

La proprietà da dimostrare è la seguente:

$$\overset{\frown}{AC} : AB = AB : BE \tag{2}$$

dalla quale è possibile ottenere la quadratura del cerchio. La dimostrazione procede per riduzione all'assurdo mostrando che non può essere né

$$\frac{\overset{\frown}{AC}}{AB} < \frac{AB}{BE} \quad (3)\ , \qquad \text{né} \qquad \frac{\overset{\frown}{AC}}{AB} > \frac{AB}{BE} \quad (4)\ .$$

Se fosse vera la (3), allora sostituiamo a BE quel segmento BP (necessariamente maggiore di BE) per cui si abbia

$$\overset{\frown}{AC} : AB = AB : BP \quad . \tag{5}$$

Poiché il denominatore AB è minore del proprio numeratore, l'arco AC, si ha di conseguenza, data l'uguaglianza, $BP < AB$. In definitiva, si ha : $BE < BP < BC$ (6). Il punto P si trova nella posizione indicata nella figura 2. Si tracci ora il quadrante di centro B e raggio BP e siano R e Q i suoi punti d'incontro rispettivamente con la curva di Ippia e Dinostrato e con lato BA: Per una evidente proprietà geometrica (proporzionalità tra archi simile e i corrispondenti raggi) si ha:

$$\overset{\frown}{AC} : \overset{\frown}{PQ} = BC : BP \qquad \text{cioè} \qquad \overset{\frown}{AC} : \overset{\frown}{PQ} = AB : BP\ . \tag{7}$$

Dal confronto delle (5) e (7) segue $\overset{\frown}{PQ} = AB$ (8); inoltre, per le relazioni tra gli archi e angoli al centro di una stessa circonferenza, si ha:

$$\overset{\frown}{PR} : \overset{\frown}{PQ} = C\hat{B}R : C\hat{B}A\ . \tag{9}$$

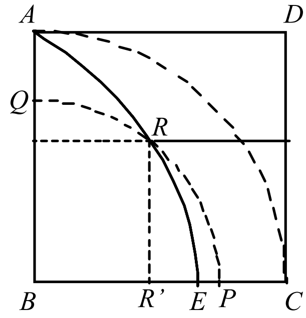


fig. 2

Dalle (1) e (9) si ha, pertanto:

$$\overset{\frown}{PR} : \overset{\frown}{PQ} = RR' : AB \tag{10}$$

e poiché i denominatori sono uguali [per la (8)], si ha l'uguaglianza dei numeratori

$$\overset{\frown}{PR} = RR'\ ,$$

il che è manifestamente assurdo. Ma anche supporre la (4) porta a un assurdo; infatti in questo caso sia BR' (necessariamente minore di BE) per cui

$$\overset{\frown}{AC} : AB = AB : BR' \tag{11}$$

Si mandi per R' la perpendicolare al lato BC e sia R il punto d'incontro di essa con la nostra curva e si consideri il quadrante $R'Q$ di centro B e raggio BR' e sia M il punto comune di tale quadrante con il segmento BR (si veda la fig. 3).
Si ha, evidentemente:

$$\overset{\frown}{AC} : \overset{\frown}{R'Q} = BC : BR' \tag{12}$$

e, per la (10) si ha:

$$\overset{\frown}{AC} : \overset{\frown}{R'Q} = \overset{\frown}{AC} : AB \quad \text{da cui} \quad R'Q = AB\ . \tag{13}$$

Ma, analogamente a quanto visto:

$$\overset{\frown}{R'M} : \overset{\frown}{R'Q} = C\hat{B}R : C\hat{B}A \tag{14}$$

e, per la (1), $\overset{\frown}{R'M} : \overset{\frown}{R'Q} = RR' : AB$

e dunque, per la (13) si ha $\overset{\frown}{R'M} = RR'$, il che è assurdo.

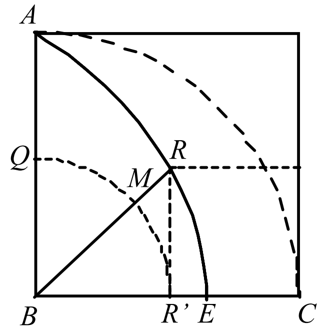


fig. 3

Si noti che, potendo costruire con riga e compasso sia il punto medio di un segmento e sia la bisettrice di un angolo, è possibile costruire infiniti punti della curva di Ippia e Dinostrato senza che per questo la si possa costruire interamente (si veda fig. 4).

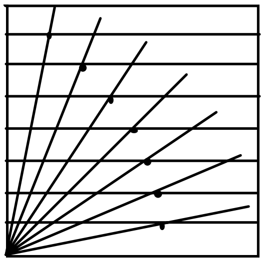


fig. 4

Pur non stabilendo espicitamente le definizioni di densità e continuità, i matematici greci non caddero nell'errore di considerare comunque la curva costruibile con riga e compasso. Anzi essi, a seconda dell'uso esclusivo di riga e compasso (cioè rette e circonferenze), dell'aggiunta delle coniche o, infine, del movimento, distinguevano le curve in piane, solide e lineari. La curva di Ippia e Dinostrato è un esempio di curva lineare.

[1] Docente di Storia della Matematica – Università degli Studi "La Sapienza" di Roma, Dipartimento di Matematica

Geometria alla scala di planck

di Paolo Di Sia (*)

La geometria quantistica (o quantica, come viene chiamata da alcuni autori) è un settore recente della matematica che introduce un nuovo concetto di spazio, unificando metodi della geometria differenziale classica con algebre non commutative e analisi funzionale e incorporando nella geometria svariate idee della fisica quantistica. La geometria quantistica lavora con spazi quantistici e include il concetto classico di spazio come caso particolare. La geometria classica viene compresa come settore commutativo della geometria quantistica; per tale ragione la geometria quantistica è anche detta geometria non commutativa. La geometria non commutativa ha un grande valore concettuale per lo studio dello spazio classico. Infatti in molte situazioni le dimostrazioni dei teoremi della geometria classica acquistano maggiore eleganza e trasparenza se eseguiti a livello quantistico.

Nella geometria classica ci riferiamo allo spazio come collezione di punti, dotati di un'opportuna struttura aggiuntiva (come ad esempio una struttura topologica data da una collezione di insiemi aperti). Contrariamente alla geometria classica, gli spazi quantistici non sono interpretabili in tale modo; non si hanno in generale punti ovunque e ci sono fluttuazioni quantistiche non banali della geometria a tutte le scale. Una applicazione molto interessante della geometria quantistica in fisica riguarda la descrizione matematicamente coerente dello spaziotempo fisico ad ogni scala, in particolare a distanze ultramicroscopiche, cioè dell'ordine della lunghezza di Planck. Ci sono radicate ragioni per ritenere che la lunghezza di Planck demarchi un confine circa l'applicabilità dei concetti classici di spazio e tempo in fisica.

L'assunzione che lo spaziotempo sia una varietà "liscia" risulta uno dei punti fissi di vari problemi di inconsistenza matematica che appaiono nelle teorie quantistiche di campo. La stessa assunzione è elemento determinante del fallimento dei tentativi di unificazione di gravità con teoria quantistica.

L'idea di uno spaziotempo con fluttuazioni quantistiche trascurabili a livello macroscopico, ma essenziali a livello della scala di Planck, è un termometro circa la sua flessibilità. In particolare il concetto di punto spaziotemporale perde senso a livello quantistico e lo stesso può essere detto per le coordinate spaziotemporali.

Riemann dimostrò che un'analisi accurata delle distanze tra tutti i punti di un dato oggetto geometrico fornisce una modalità per stabilire quantitativamente la sua curvatura. Einstein sottolineò l'aspetto squisitamente fisico del lavoro matematico di Riemann interpretando la curvatura dello spaziotempo mediante la forza gravitazionale. La geometria riemanniana, che è la struttura matematica della relatività generale, deve subire delle modifiche per poter fornire una adeguata descrizione della fisica a distanze ultramicroscopiche. La geometria riemanniana descrive perciò le proprietà di curvatura dell'universo solo a scale sufficientemente grandi.

La teoria delle stringhe pone un limite oltre il quale pare non possibile rendere più piccolo alcun oggetto: la lunghezza di Planck (L_{Planck}); fissa un limite inferiore all'ordine di grandezza delle distanze accessibili dal punto di vista fisico stabilendo che nessuna delle dimensioni dell'universo può contrarsi al punto da risultare minore di L_{Planck} . Proviamo a capire meglio il perché: se consideriamo i movimenti di una particella puntiforme e quelli di una stringa vi è una notevole differenza in relazione alla forma dello spazio su cui la stringa si muove. Se lo spazio è ad esempio a forma di tubo, la stringa vi si può avvolgere. Può scorrere lungo il tubo e oscillare. In questa configurazione si parla di modo di avvolgimento. Una stringa arrotolata possiede una massa minima, determinata dalla lunghezza della dimensione circolare e dal numero di volte che si arrotola sul tubo. Per certi aspetti possiamo dire la stessa cosa anche per le stringhe non arrotolate (hanno una massa minima, altrimenti diventerebbero oggetti puntiformi), ma gli effetti quantistici sono in grado di cancellare in maniera esatta tale contributo non nullo. L'esistenza dei modi di avvolgimento di stringa traduce in un'espansione i tentativi di diminuzione delle distanze sotto L_{Planck} e ciò porta il collasso cosmico a diventare una specie di rimbalzo (*bounce*) cosmico.

Di recente significativi progressi sono stati registrati in cosmologia quantistica (a livello tecnico e concettuale). Il progresso è basato proprio sullo sviluppo della geometria quantistica, che può essere utilizzata per studiare la quantizzazione di teorie (come la relatività generale e la supergravità) senza l'intervento di approssimazioni; non si utilizzano cioè tecniche non recenti (come la teoria perturbativa). Tra i risultati ottenuti vi è anche il fatto che le aree e i volumi sono discreti, nello stesso senso dell'energia quantizzata. I soli valori possibili di aree e volumi misurati derivano da un certo spettro discreto. Ciò conduce ad importanti implicazioni e predizioni sulla struttura stessa dello spaziotempo alla scala di Planck.

In particolare Bojowald ha scoperto la possibilità dell'assenza di una singolarità iniziale (cioè di un punto dove la curvatura dello spaziotempo diventa infinita) e pertanto non ci sarebbe un istante iniziale nello scenario della nascita dell'universo. Tale comportamento è il "rimbalzo" precedentemente menzionato; da qui la possibilità che il *big bang* si sia presentato come derivante da un evento in un universo precedente, mediante il collasso di un buco nero in quell'universo o dal collasso dell'intero universo. L'ipotesi che il big bang derivi da un "rimbalzo" non è nuova; era stata suggerita da Richard Tolman intorno al 1930 ed è stata studiata nella teoria delle stringhe da Gabriele Veneziano e dai suoi collaboratori sotto il nome di "cosmologia di stringa". La sostituzione della singolarità iniziale con un "rimbalzo" sembra addirittura essere un risultato necessario nella formulazione di una teoria quantistica esatta della gravità.

(*) disia@sci.univr.it

In vita da 6 anni!

Nel febbraio del 1998 nacque MatematicaMente. L'idea venne a me e fu accolta dal compianto Luigi Marigo con grande entusiasmo. Insieme la sostenemmo sia sollecitando gli amici, sia scrivendo di prima mano gli articoli necessari a garantirne la continuità di uscita. Occorre ricordare due meriti della redazione: 1) è riuscita sempre a rispettare i tempi di pubblicazione; 2) non è mai scesa a compromessi sulla qualità degli articoli pubblicati. Essa, con certosino lavoro, insieme a me, ha garantito che gli articoli fossero sostanzialmente corretti. Forse per questo MatematicaMente viaggia per l'Italia, è apprezzata da docenti e cultori e gode buona salute. Ce la metteremo tutta per farle compiere i 10 anni! Ringrazio tutti coloro che con articoli e spunti vari hanno permesso alla rivista di vivere e, in particolare, ringrazio Luigi Marigo che mi ha dato tanta carica, quando io – per eccesso di lavoro – avrei voluto chiudere, già 3 anni fa. (L. C.)