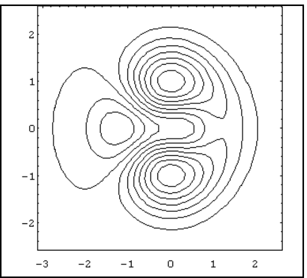
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 77 – marzo 2004



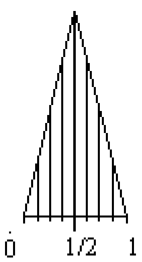
Eventi nel continuo: una curiosa considerazione

di Luciano Corso

Abbiamo visto in MatematicaMente n. 14 (febbraio 1999) e n. 15 (marzo 1999) che le σ-algebre nel continuo assumono una configurazione in qualche modo simile alle σ-algebre del discreto. In particolare, considerando un segmento di retta lungo uno, e interpretando gli eventi di Ω - spazio campionario - come parti di partizioni finite (sotto intervalli) di Ω, si può costruire una interpretazione della misura (probabilità) del verificarsi di un evento di Ω come somma delle lunghezze degli intervalli che rappresentano l'evento congiunto (in genere un plurintervallo) che si è preso in considerazione. Il ragionamento che facemmo risentiva di una ipotesi di fondo cui abbiamo sempre fatto riferimento senza mai esplicitarla: l'ipotesi di uniforme distribuzione della funzione di misura. Una ipotesi più generale sul segmento di retta [0;1] si basa su una densità di punti non uniforme. Per esempio, sia data la seguente funzione di densità di probabilità:

$$f(X)=\begin{cases} 4\cdot X & \{X \mid X\in R;\, 0\le X\le 1/2\} \\ -4\cdot X+4 & \{X \mid X\in R;\, 1/2< X\le 1\} \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

In coordinate cartesiane si ha la seguente rappresentazione di $f(X)$:



Determiniamo la funzione di ripartizione:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \{x : x\in R,\, x<0\} \\ 2\cdot x^2 & \{x : x\in R,\, 0\le x\le 1/2\} \\ -2\cdot x^2+4\cdot x-1 & \{x : x\in R,\, 1/2<x\le 1\} \\ 1 & \{x : x>1\} \end{cases}$$

La ricerca dei momenti è un facile esercizio.
Se confrontiamo la probabilità che si verifichi un punto appartenente al sotto intervallo (2/8,4/8] del segmento di retta considerato, nel caso di una uniforme distribuzione dei punti sul segmento e nel caso di una distribuzione a tenda, come quella sopra riportata, si ha: P(2/8 ≤ x ≤ 4/8 | v.a. uniforme)= 2/8; P(2/8 ≤ x ≤ 4/8 | v.a. a tenda)=3/8. Ora una funzione di densità di probabilità definita in un intervallo continuo descrive l'addensamento di punti nei diversi sotto intervalli contenuti nell'intervallo considerato. Ogni sotto intervallo ha una densità diversa. Che significa ciò? È possibile pensare che vi siano intervalli della retta reale con addensamenti di punti diversi? O forse occorre dare un significato diverso al concetto di densità di probabilità? È inusuale pensare che a parità di intervalli vi siano addensamenti di punti diversi sulla retta reale. Bisogna allora ipotizzare che sulla retta reale, dato un intervallo su cui è definita una densità di probabilità, a parità di sotto intervalli, corrispondano densità di punti uguali; sono invece i dati sperimentali osservati o osservabili che possono accumularsi in modo diverso nei diversi sotto intervalli su cui è definita la densità di probabilità, che misura quindi un addensamento di punti osservato o osservabile diverso per ogni sotto intervallo considerato. Quindi una misura di probabilità diversa, a parità di intervalli sulla retta, corrisponde all'idea che sia possibile una sperimentazione in cui le quantità di dati osservabili, in un dato sotto intervallo, siano diverse a seconda del tipo di distribuzione di probabilità usata.

Nidi di Radici

di Vincenzo Zamboni

Dedico questo piccolo lavoro alla memoria di Srinivasa Ramanujan, geniale matematico indiano che, tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento sviluppò in modo insolito e originale parecchi settori della matematica. Ramanujan amava molto i piccoli rompicapo come i "nidi di radici" che qui presento, e l'utilità di molte delle sue ricerche, che apparivano a volte troppo estranee ai suoi contemporanei, divenne spesso evidente dopo la sua morte, molto tempo dopo. Ancora oggi molti dei suoi quasi 4000 teoremi e congetture vengono studiati alla ricerca di una loro giustificazione, poiché estranei ai metodi ortodossi della matematica convenzionale. Una bella biografia di Ramanujan è in [B.1].

a) Nidi finiti di radici

Proviamo a calcolare:

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\ . \qquad (1)$$

L'operazione è un po' noiosa, ma sapendo che $\sqrt{2} = 2^{(½)}$ è fattibile. Otteniamo:

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=\left(2\left(2(2)^{(1/2)}\right)^{(1/2)}\right)^{(1/2)}=2^{(7/8)}. \qquad (2)$$

Ora proviamo con un nido formato da n radici:

$$\underbrace{\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\ldots\cdot\sqrt{2}}}}}_{n\ volte}=? \qquad (3)$$

Costruendo una successione numerica come segue:

$$a_1=\sqrt{2}=2^{1/2}$$

$$a_2=\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{2\cdot a_1}=2^{3/4}$$

$$a_3 = \sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}} = \sqrt{2\cdot a_2} = 2^{7/8}$$

$$a_4 = \sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}}} = \sqrt{2\cdot a_3} = 2^{15/16} \tag{4}$$

………………………………………………

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\ldots\cdot\sqrt{2\cdot}}}}_{n\ volte} = 2^{\left[\left(2^n-1\right)/2^n\right]} . \tag{5}$$

Il termine generale della successione gode dunque della proprietà ricorsiva:

$$a_n = \sqrt{2}\cdot\sqrt{a_{n-1}} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Tramite la (5) possiamo calcolare il valore di qualunque nido finito di radici del tipo (3).

b) Nidi infiniti di radici

La (5) ci permette di calcolare anche il valore di un nido infinito, del tipo

$$\underbrace{\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{\ldots}}}}}}_{infinite\ volte} = ? \tag{7}$$

il risultato è sorprendentemente semplice: è 2. Infatti

$$\underbrace{\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{\ldots}}}}_{infinite\ volte} = \lim_{n\to\infty} 2^{\left[\left(2^n-1\right)/2^n\right]} = 2 \tag{8}$$

Naturalmente, i risultati descritti possono essere generalizzati per un valore qualsivoglia della base:

$$\sqrt{h\cdot\sqrt{h\cdot\sqrt{h\cdot\sqrt{\ldots}}}} \quad ,$$

ottenendo, al posto delle (5), (6), (8):

$$a_n = h^{\left[\left(2^n-1\right)/2^n\right]} \tag{9}$$

$$a_n = \sqrt{h}\cdot\sqrt{a_{n-1}} \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = h \quad . \tag{11}$$

Quanto esposto ha l'aspetto della semplice risoluzione di un indovinello. Però, relazioni come le (9), (10) e (11) risultano utilizzate in Meccanica Quantistica (ad esempio nella teoria della quantizzazione dei campi).

Consideriamo, ora, il rapporto aureo ϕ = 1,618…; ci sono diversi modi per definirlo. Si può, per esempio, definire ϕ come la soluzione non negativa dell'equazione $x^2 - x - 1 = 0$. Oppure, si può definirlo come l'inverso del valore della frazione continua:

$$x = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}} \quad ; \quad \phi = \frac{1}{x} \ . \tag{12}$$

Ancora, si può definire ϕ come il valore del nido infinito di radici:

$$\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}} \quad . \tag{13}$$

Questo esempio ci mostra che frazioni continue infinite e nidi infiniti di radici possono essere, a volte, trasformati in equazioni algebriche equivalenti, benché si debba stare attenti al tipo di equazioni adottate per la trasformazione. Nel caso (13) le radici vanno intese come radici aritmetiche, altrimenti, considerandole radici algebriche, otterremmo infiniti risultati. Infatti da

$$z = \pm\left|\sqrt{1\pm\left|\sqrt{1\pm\left|\sqrt{1\pm\ldots}\right|}\right|}\right| \tag{14}$$

si vede bene che si otterrebbero 2^∞ soluzioni.

Bibliografia: [B.1] Robert Kanigel, *L'uomo che vide l'infinito*, Rizzoli editore, 2003, Milano

Parabole e punti

di Elisabetta Capotosto

È uscito il libro di poesie e matematica dal titolo "*Parabole e punti*". Il volume è stato vagliato da numerose persone e da due critici letterari. L'edizione è stata curata direttamente dall'autore del libro - il nostro presidente Luciano Corso, infaticabile attivista, ideatore del presente foglio - il quale ha anche provveduto a realizzare i disegni e i grafici che accompagnano i testi. La sezione Mathesis di Verona ha accettato di fungere da editrice dell'opera.

Il libro raccoglie una rivisitazione delle sensazioni più profonde del vivere, in linguaggio matematico. Presenta una visione drammatica della vita, basata sull'idea che tutto sia una «*… combinazione infinita di cose dominate dal vuoto e il moto continua*» anche quando «*…una parola organizzata …*» può riuscire «*… a dare il là a un sentimento*».

È un tentativo - difficile - di presentare la matematica come una disciplina formale non arida. Il lavoro è il risultato di anni di applicazione dell'autore, come matematico applicato in diversi ambiti della ricerca scientifica. Sono 100 le pagine che presentano i 55 (numero di Fibonacci) brevi brani letterari, parecchi dei quali a orientamento poetico. «*Il poeta, in fondo, - afferma Luciano Corso - usa una simbologia ermetica, come il matematico; e la poesia, come la matematica, carica di implicazioni semantiche profonde, sottili e sintetiche ciò che sperimentiamo intimamente durante il nostro lavoro e sentiamo vivendo*».

L'edizione è buona. Il costo del libro è di 5 (cinque) euro, compresa la spedizione (non raccomandata). Alla Mathesis di Verona va il 50% delle entrate nette, il resto va all'autore per la copertura dei costi vivi. Per ricevere il testo, basta fare il versamento sul conto corrente della sezione di Verona della Mathesis alle seguenti coordinate bancarie:

CIN K — C.ABI 05188 — C.A.B. 11715 — N.Conto 5547

Intestato a

Corso Luciano c/o Mathesis VR
Via IV Novembre 11/B – 37126 Verona,

e specificando la causale del versamento. Si può anche versare il contributo mediante vaglia postale, allo stesso indirizzo. Il libro verrà spedito per posta ordinaria.
Chi può passare dalla sezione, previo accordo telefonico, può acquistare il testo direttamente dall'autore. Il libro sarà presentato venerdì 16 aprile alle ore 17.30 presso il Liceo Scientifico Mascheroni di Bergamo e giovedì 22 aprile dalle ore 18.00 alle 19.30 alla Società Letteraria di Verona. Per le due occasioni sarà presente l'autore.

Corso di Ecologia 2003: ecco i risultati

Sabato 27 marzo si è concluso con la consegna dei diplomi e dei patentini da parte dell'assessore all'ecologia del Comune di Verona, avvocato Luciano Guerrini, il "Corso di Guida Ecologica Escursionistica". Il corso è stato organizzato dalle Sezioni di Verona della *MATHESIS* e del *WWF - Fondo Mondiale per la Natura*, e ha avuto i patrocini del Comune e della Provincia di Verona. È durato un intero anno: dai primi di marzo alla fine di novembre del 2003. La patente di Guida Ecologica Escursionistica è stato consegnata a 30 persone. Esse hanno superato le quattro prove previste distribuite nell'intero anno di corso. I partecipanti regolarmente iscritti al corso sono stati 91. Da parte di tutti gli uditori è risultata gradita la scelta della direzione scientifica di trattare l'Ecologia nei suoi aspetti quantitativi e di definire la figura professionale di Guida Ecologica Escursionistica come un conoscitore esperto dell'ambiente e delle sue tematiche, capace di suscitare interesse quando invita a osservarne le peculiarità e di farlo vivere senza lasciare traccia alcuna del proprio passaggio. (*di Andrea Albiero)*