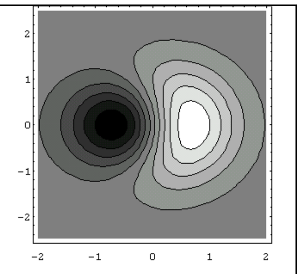
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 78 – aprile 2004



La serie $\Delta(x)=1-2^{-x}+3^{-x}-4^{-x}+\ldots$

di Arnaldo Vicentini

Introduzione

Detta $\zeta(x)$ la serie "*zeta di Riemann*"

$$\zeta(x)=1+2^{-x}+3^{-x}+4^{-x}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x} \qquad (1)$$

si considerino le serie:

$$D(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^x}\,; \quad P(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^x}\,;$$

$$\Delta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\,.$$

Limitiamoci ad x reale. Dove $\zeta(x)$ converge, cioè per $x>1$, essendo allora $P(x)=\zeta(x)/2^x$, risulta:

$$\zeta(x)=D(x)+\zeta(x)/2^x \;\Rightarrow\; D(x)=(1-1/2^x)\cdot\zeta(x)\,;$$

$$\Delta(x)=D(x)-P(x)=\frac{2^x-2}{2^x}\cdot\zeta(x) \;\Rightarrow\; \zeta(x)=\frac{2^x}{2^x-2}\cdot\Delta(x)\,.$$

In conclusione, per $x>1$ abbiamo:

$$\zeta(x)=\frac{2^x}{2^x-2}\cdot\Delta(x)\;;\; D(x)=\frac{2^x-1}{2^x-2}\cdot\Delta(x)\;;$$

$$P(x)=\frac{\Delta(x)}{2^x-2}\,. \qquad (2)$$

Le (2) tornano utili quando si voglia calcolare in pratica le funzioni cui tendono le dette serie perché $\Delta(x)$, avendo termini a segno alterno, consente facilmente di maggiorare l'errore che si compie arrestando la serie all'n-esimo addendo. Per esempio, è noto che, per k intero positivo, il rapporto tra $\zeta(2\cdot k)$ e $\pi^{2\cdot k}$ è razionale [B.1]; in particolare, $\zeta(8)=\pi^8/9450$, ossia $\pi^8=128\cdot 9450\cdot\Delta(8)/127$. Detta R_n la ridotta n-esima di $\Delta(8)$, si ha $(R_{13}+R_{12})/2\pm(R_{13}-R_{12})/2=0{,}99623300167\pm 6{,}1\cdot 10^{-10}$; da cui, con tre radici quadrate dopo i dovuti prodotti e rapporto, si trova $\pi=3{,}1415926535\pm 2{,}4\cdot 10^{-10}$, con ben 10 cifre esatte!

Studio di $\Delta(x)$

a) La serie $\Delta(x)$, diversamente dalle serie $\zeta(x)$, $D(x)$ e $P(x)$, converge anche per $0<x\le 1$. Infatti per un tale x e per k intero positivo, sommando due termini consecutivi di $\Delta(x)$ abbiamo:

$$\frac{1}{(2k-1)^x}-\frac{1}{(2k)^x}>0\,; \quad -\frac{1}{(2k)^x}+\frac{1}{(2k+1)^x}<0\,.$$

Sicché le successioni delle ridotte $2n$-esime e $(2n+1)$-esime di $\Delta(x)$ sono la prima crescente, la seconda decrescente e maggiore della prima per ogni n intero positivo: convergono dunque entrambe; al tendere di n all'infinito, essendo la loro differenza infinitesima, tendono allo stesso limite. Ovviamente al medesimo limite tende la media delle dette ridotte, cioè la successione di termine n-esimo $\Delta_n(x)$, con:

$$\Delta_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^n}{(n+1)^x}\,;$$

$$\Delta_\infty(x)=\lim_{n\to\infty}\Delta_n(x)\,. \qquad (3)$$

In particolare, $\Delta(1)=\Delta_\infty(1)=1-1/2+1/3-1/4+\ldots=ln(2)$.

b) Al tendere di x a 0, $\Delta(x)$ tende ad $1/2$. Infatti $\Delta(x)$ – continua per $x>0$ – non è definita per x=0 in quanto ivi, per ogni n intero positivo, la sua ridotta $2n$-esima vale 0 e la $(2n+1)$-esima 1; però, in base alle (3):

$$x>0 \;\Rightarrow\; \Delta_\infty(x)=\Delta(x)\,;$$

$$\forall n\in \boldsymbol{N}\setminus\{0\}\,,\,\Delta_n(0)=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \Delta_\infty(0)=\frac{1}{2}\,.$$

La Fig. 1 mostra i grafici delle ridotte 54-esima e 55-esima di $\Delta(x)$ – indicate rispettivamente con $R_{54}(x)$ e $R_{55}(x)$ – assieme a quello della loro media $\Delta_{54}(x)$, già molto prossima a $\Delta_\infty(x)$.

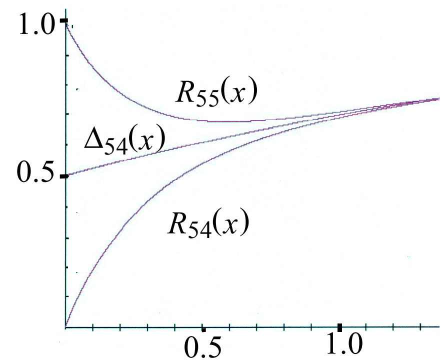


Fig. 1. Le ridotte pari e dispari di $\Delta(x)$ e la loro media

c) Al tendere di x a 0 la derivata di $\Delta(x)$ tende a $(1/2)ln(\pi/2)$. Per quanto detto, basta provare che a tale limite tende la derivata di $\Delta_\infty(x)$. Allo scopo occorre ricordare che, [B.2]:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n\cdot n!)^4}{n\cdot[(2\cdot n)!]^2}=\pi\,.$$

Con ciò, detta d_n la derivata di $\Delta_n(x)$, in $x=0$, abbiamo:

$$d_{2n}=ln(2)-ln(3)+\ldots-ln(2n-1)+ln(2n)-(1/2)\cdot ln(2n+1)=$$

$$=ln\,\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}-\frac{1}{2}\cdot ln(2n)-\frac{1}{2}\cdot ln(1+\frac{1}{2n})=$$

$$=ln\,\frac{(2^n\cdot n!)^2}{\sqrt{2n}\cdot(2n)!}-\frac{1}{2}\cdot ln(1+\frac{1}{2n})\,;\quad \lim_{n\to\infty}d_{2n}=\frac{1}{2}\cdot ln(\pi/2)\,.$$

d) La derivata di $\Delta(x)$, in x=1, vale $ln(2)\,[\gamma-ln(\sqrt{2})]$, dove:

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-ln(n) = 0{,}577221566490\ldots \qquad (4)$$

La tesi si prova partendo dalla prima delle (2) per x=1+h con h positivo. Allora infatti:

$$\Delta(1+h)=\frac{2^{1+h}-2}{2^{1+h}}\cdot\zeta(1+h)=\left(1-e^{-h\cdot ln(2)}\right)\cdot\zeta(1+h)\,. \qquad (5)$$

Ricordando che $\Delta(1)=ln(2)$, dalla (5) si ricava:

$$\Delta'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta(1+h)-ln(2)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\left(1-\frac{h\cdot ln(2)}{2}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{1+h}}\right)-\frac{1}{h}\right]\cdot ln(2)\,.$$

Da qui, assumendo $h = 1 / ln(n)$ e tenendo conto della (4), si ha:

$$\Delta'(1) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(1 - \frac{ln(\sqrt{2})}{ln(n)}\right) \cdot [ln(n) + \gamma] - ln(n) \right\} \cdot ln(2) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[ln(n) + \gamma - ln(\sqrt{2}) - \frac{\gamma \cdot ln(\sqrt{2})}{ln(n)} - ln(n) \right] \cdot ln(2) =$$

$$= ln(2) \cdot [\gamma - ln(\sqrt{2})] .$$

La Fig. 2 mostra il grafico di $\Delta(x)$. Il confronto con le rette di equazione $y = [1+x \cdot ln(\pi / 2)] / 2$ e $y = ln(2) \cdot [1+(x-1) \cdot (\gamma - ln(\sqrt{2}))]$ consente la verifica sperimentale delle tesi ***c***) e ***d***).

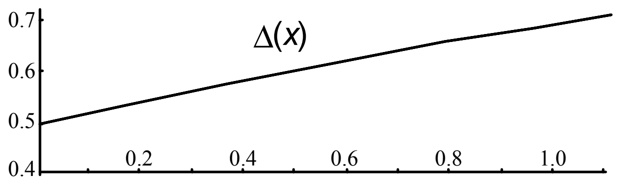


Fig. 2. Andamento di $\Delta(x)$ tra x=0 e x=1.

[B.1] Arnaldo Vicentini, *A proposito di π*, Atti del Congresso della Mathesis Nazionale 1996 -Verona, pagg 161-162.
[B.2] *Ibidem*, pag. 173.

Piccola considerazione storica

di Maurizio Emaldi [1]

Le funzioni a valori reali di una variabile reale oggi generalmente sono considerate in analisi funzionale poiché con esse è possibile costruire spazi con particolari proprietà.

Lo studio sistematico delle funzioni a valori reali di una variabile reale, considerate interessanti per loro stesse, è stato svolto tra il 1820 e il 1930 da studiosi interessati alla struttura dei numeri reali. Nel 1878 apparvero i "Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali" di U. Dini, il primo libro sul soggetto. In esso, lo studio delle funzioni reali di una variabile reale diventa corpo di dottrina.

È di Ulisse Dini il maggior contributo allo sviluppo della teoria della differenziazione nel secolo diciannovesimo. Questo contributo include un teorema che definisce la classe della funzioni continue e in nessun punto differenziabili. A questa classe appartiene la funzione di Weierstrass, che è la funzione $W(x)$ definita ponendo

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot cos\left(\pi \cdot b^n \cdot x\right) \qquad \text{(ogni } x \text{ reale)}$$

dove a è un dato numero reale, con $0 < a < 1$, e b è un dato numero positivo dispari. Poiché la serie converge uniformemente, $W(x)$ è continua e inoltre essa è periodica con periodo 1. Sotto la condizione $a \cdot b > 1+(3/2) \cdot \pi$ questa funzione è differenziabile in nessun punto. Questa non differenziabilità non è del tutto facile da stabilire.

La funzione di Weierstrass, proposta nel 1872, è il primo esempio di funzione continua e differenziabile in nessun punto. Una funzione continua e differenziabile in nessun punto, la cui non differenziabilità può essere stabilita più facilmente di quella della funzione di Weierstrass, è la funzione $T(x)$ proposta da Takagi nel 1904 nel volume 14 del Giornale della Scuola di Fisica di Tokio. Questa funzione è definita ponendo

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot g\left(2^k \cdot x\right) \qquad \text{(ogni } x \text{ reale)}$$

dove, per ogni reale t, $g(t)$ indica la distanza di **t** dal numero intero più vicino. Poiché $g(t)$ è continua e periodica con periodo 1, così è $T(x)$. Il grafico di $T(x)$, per $0 \le x \le 1$, lo otteniamo accatastando triangoli (fig. 2).

Verifichiamo che $T(x)$ è differenziabile in nessun punto x, con $0 \le x \le 1$. Per fare questo poniamo

$$g_k(x) = 2^{-k} \cdot g\left(2^k x\right) \qquad \text{(k=0, 1, 2, …)}$$

cosicché

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) .$$

Prima supponiamo che a sia un numero diadico razionale di ordine n, $a = m / 2^n$, $0 \le x \le 1$. Allora

$$T(a) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k(a)$$

poiché $2^k \cdot a$ è un intero per $k \ge n$. Ora consideriamo una coppia di successioni a_n, b_n di numeri diadici razionali di ordine n, con $a_n \le x < b_n$ e $b_n - a_n = 1 / 2n$. Allora abbiamo

$$\frac{T(b_n) - T(a_n)}{b_n - a_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g_k(b_n) - g_k(a_n)}{b_n - a_n}$$

Poiché g_k è funzione lineare sull'intervallo $[a_n , b_n]$ per $0 \le k < n$, il quoziente delle differenze nell'ultima somma è la derivata destra $g_k^+(x)$. Poiché però $g_k^+(t)$=±1,

$$\frac{T(b_n) - T(a_n)}{b_n - a_n} = \sum_{k=0}^{n-1} g_k^+(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (\pm 1)$$

non può convergere a un limite. Perciò $T(x)$ non è differenziabile nel punto x, altrimenti avremmo la relazione impossibile

$$T'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\pm 1) .$$

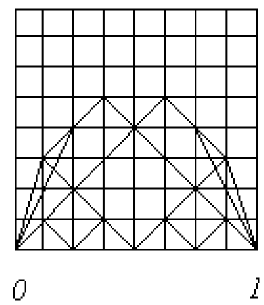


fig. 2 : $g(x) + \frac{1}{2} \cdot g(2 \cdot x) + \frac{1}{4} \cdot g(4 \cdot x)$

[1] Docente di Algebra – Dipartimento di Matematica - Università degli Studi di Padova.

Punti di vista sulla conoscenza

di Luciano Corso

Se è importante conoscere, occorre stabilire che cosa si deve intendere per conoscenza. Platone dà un concetto di conoscenza che ancora oggi conserva la sua suggestività. Nel Teeteto [B.1], si danno varie definizioni di conoscenza. La prima è la non equivocità del concetto. Ma poi, sempre nel Teeteto, si legge che *la conoscenza non è che sensazione*. A Teeteto ribatte Socrate, il quale sostiene che tale definizione ricalca quella più antica di Protagora, il quale sosteneva che l'uomo è la misura di tutto ciò che esiste e la misura del suo conoscere dipende dai suoi sensi. Ma ciò si presta a una non oggettività di giudizio. Infatti non sempre ciò che appare a ciascuno, appare nello stesso modo agli altri e, in più, non sempre ciò che appare esiste. La sensazione, se fosse conoscenza, non dovrebbe mai mentire. Protagora, però, insegnava bene ai suoi allievi e certamente sapeva che esisteva questa manchevolezza ed era per questo che cercava di colmare questa lacuna della sua definizione con l'asserire che l'essere è mutazione e come tale non si può dare una definizione di conoscenza come sopra, senza prendere atto che nulla è, ma tutto diviene. Viene così salvata la mancanza di oggettività della conoscenza. Tutto ciò mette scompiglio nella mente di Teeteto il quale cerca una nuova definizione di conoscenza. (*segue al n. 79*)