MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 80 – giugno 2004

IL PARADISO DI CANTOR

di Ruggero Ferro

Una ulteriore e diversa applicazione del teorema di Cantor porta alla costruzione del cosiddetto "paradiso di Cantor". Questa espressione vuole indicare l'esistenza di una successione, addirittura transfinita, di cardinalità infinite ciascuna strettamente maggiore della precedente. Allo scopo basta iterare il passaggio all'insieme dei sottoinsiemi, ad esempio a partire dall'insieme dei numeri naturali, per ottenere una successione di insiemi la cui cardinalità, per il teorema di Cantor, continua a crescere strettamente:
$|\mathbf{N}| < |P(\mathbf{N})| < |P(P(\mathbf{N}))| < \ldots < |P(\ldots P(P(P(P(\mathbf{N}))))\ldots)| < \ldots$

Così l'immagine che ci si può fare degli insiemi infiniti diventa molto articolata poiché ciascuna delle loro cardinalità può essere una delle tante cardinalità possibili esemplificate nella successione, o altre ancora dal momento che non è detto che tutte le cardinalità si esauriscano tra quelle indicate nella precedente lista. Ora ci si vuole domandare quanto va avanti l'elenco presentato? Anche se per ora non si può arrivare ad una risposta precisa, poiché questa richiederebbe l'introduzione dei numeri ordinali, si può osservare che ci sono cardinalità strettamente maggiori di ciascuna delle cardinalità della successione prima indicata.

Si indichi con $P^{i}(\mathbf{N})$ l'iterazione per i volte del passaggio all'insieme dei sottoinsiemi a partire dall'insieme $\mathbf{N}$ [così, ad esempio, $P^2(\mathbf{N})$ è $P(P(\mathbf{N}))$]. Si consideri l'insieme
$\cup_i\{P^{i}(\mathbf{N}): i\in\mathbf{N}\}$.
Si dimostra che, per ogni numero naturale i, la cardinalità dell'insieme $P^{i}(\mathbf{N})$ è strettamente minore della cardinalità dell'insieme $\cup_i\{P^{i}(\mathbf{N}): i\in\mathbf{N}\}$, $|P^{i}(\mathbf{N})| < |\cup_i\{P^{i}(\mathbf{N}): i\in\mathbf{N}\}|$.
Ciò segue dal più generale
TEOREMA. Se per ogni numero naturale i, X_i è un insieme infinito tale che $|X_i| < |X_{i+1}|$, allora l'unione di questi insiemi, $\cup_i\{X_i: i\in\mathbf{N}\}$, ha cardinalità strettamente maggiore della cardinalità di ciascun X_i. Inoltre la cardinalità di $\cup_i\{X_i: i\in\mathbf{N}\}$ è la minima maggiore di tutte le cardinalità degli X_i.
Dimostrazione. Per comodità di scrittura, si indichi con Y l'insieme $\cup_i\{X_i: i\in\mathbf{N}\}$. Poiché X_i è contenuto in Y, la funzione identica su X_i è una funzione totale e iniettiva da X_i in Y, sicché $|X_i| \le |Y|$. Per completare la dimostrazione bisogna mostrare che $|X_i| \ne |Y|$. Ciò segue dal fatto che, per lo stesso motivo, anche $|X_{i+1}| \le |Y|$, e che $|X_i| < |X_{i+1}|$, così $|X_i| < |X_{i+1}| \le |Y|$ e $|X_i| < |Y|$.

Per mostrare l'ultima affermazione, si supponga per assurdo che ci sia un insieme Z di cardinalità minore di $|Y|$ e maggiore di $|X_i|$ per ogni numero naturale i. Allora esisterebbero biiettività f_i da ciascun insieme X_i in corrispondenti sottoinsiemi Z_i di Z. Non è restrittivo supporre che gli insiemi Z_i siano a due a due disgiunti: infatti per induzione sull'indice degli insiemi, ottenuti i primi k, la loro unione ha per cardinalità la massima delle cardinalità degli insiemi considerati (per i risultati visti prima), cioè $|X_k|$, che è minore di $|Z|$, sicché $|Z - (\cup_j\{Z_j: j\le k\})| = |Z|$ (sempre per i risultati visti prima) e si può prendere Z_{k+1} ? $P(Z - (\cup_j\{Z_j: j\le k\}))$, cioè disgiunto dai precedenti. Così $|Y| = |\cup_i\{X_i: i\in\mathbf{N}\}| \le |\cup_j\{Z_j: j\in\mathbf{N}\}| \le |Z| < |Y|$, che è assurdo. Pertanto non può esistere un insieme Z con tale cardinalità.

Si noti che, se X_i è $P^{i}(\mathbf{N})$, allora Y è $\cup_i\{P^{i}(N): i\in N\}$ e il caso particolare considerato rientra proprio nella generalità del teorema dimostrato.

Si noti ancora che l'insieme Y ottenuto può diventare il punto di partenza per una ulteriore successione di insiemi di cardinalità sempre strettamente maggiore, e precisamente gli insiemi $P^{i}(Y)$, e che l'unione di questi è un insieme di cardinalità ancora maggiore. E il gioco può continuare.
Oltre agli interrogativi sul prolungarsi della successione delle cardinalità infinite sempre maggiori, è del tutto naturale l'interrogativo se tra $\mathbf{N}$ e $P(\mathbf{N})$ c'è o meno una cardinalità strettamente compresa tra le due. Più in generale, ci si può chiedere se, dato X un insieme infinito, esiste un insieme Y tale che $|X| < |Y| < |P(X)|$.

Cantor ipotizzò che non ci siano insiemi Z tali che $|\mathbf{N}| < |Z| < |P(\mathbf{N})|$, e questa ipotesi ha preso il nome di ipotesi del continuo. L'ipotesi poi che non esistano insiemi Y tali che $|X|<|Y|<|P(X)|$ prende il nome di ipotesi generalizzata del continuo. Ancora, per discutere più facilmente l'ipotesi e la sua generalizzazione, è opportuno poter disporre dei numeri ordinali, ma questi saranno considerati più avanti, e si rinvia ad allora un approfondimento del tema indicato. Tuttavia si possono enunciare i risultati principali a cui si perviene. Gödel ha dimostrato che, se gli usuali primi assiomi della teoria degli insiemi sono consistenti, allora l'aggiunta a questi dell'assioma della scelta e dell'ipotesi generalizzata del continuo porta ad un sistema ancora consistente. D'altra parte Cohen ha dimostrato che l'aggiunta agli usuali assiomi della teoria degli insiemi della negazione dell'assioma della scelta, oppure dell'assioma della scelta e della negazione dell'ipotesi del continuo (o di quella generalizzata) portano ancora a teorie consistenti, Cioè ha provato l'indipendenza dell'assioma della scelta e dell'ipotesi del continuo dai precedenti assiomi.

Punti di vista sulla conoscenza

di Luciano Corso

[*Segue dal n.* 79] Il *concetto* contraddistingue in modo univoco quella peculiarità che differenzia gruppi di oggetti da altri e li accomuna. Il passaggio è difficile e può essere fatto solo se si ha una buona capacità di astrazione. Un esempio può essere utile: una cosa sono quei cani lì, che vedo quando cammino e giro per il territorio, altra cosa è il cane come entità astratta, sintesi delle caratteristiche comuni della specie. Molti studiosi dell'opera di questo filosofo (384-322 a.c. circa) hanno ormai confermato che lo stesso Aristotele era ben cosciente dell'assoluta novità del suo pensiero e per evitare di subire critiche feroci da parte dei filosofi contemporanei, egli dichiara che questo risultato era già noto a Socrate. Per Aristotele, la conoscenza è legata anche alla logica [B.3]. Ma forse il pensiero aristotelico sulla conoscenza manifesta la sua più forte modernità proprio sul tema dell'osservazione della natura. I due punti che occorre evidenziare, in questo breve scritto, sono: 1) *la natura è il laboratorio privilegiato per arrivare alla conoscenza*; 2) *il metodo per arrivare a conoscere è quello sperimentale*.

L'opera di Aristotele compendia più di 300 anni di storia filosofica classica. Vale la pena ricordare alcuni filosofi, che hanno preceduto Aristotele e che hanno pesato considerevolmente sulla formazione del concetto di conoscenza, così come poi si svilupperà nel mondo occidentale.

Per Anassimandro (610-546 a.c. circa) *conoscere vuol dire cogliere le leggi (parola forse presa dal vocabolario politico di allora) che governano la natura*. La natura è costituita da quattro elementi fondamentali: *aria, fuoco, acqua e terra*. La combinazione di questi quattro elementi ha dato origine alla vita. Il fondamento di questa vita è però decisamente orientato da un qualcosa che sfugge alla ragione: l'indeterminato, l'*indefinito* (″απειρον = *àpeiron*). È l'indefinito a organizzare i quattro elementi al fine di generare i viventi. L'indefinito diventa pregnante per ogni sviluppo del pensiero filosofico e matematico successivo. A questa idea si è successivamente e per lungo tempo associata quella di *infinito* [B.4].

Pitagora (580-500 a.c. circa) sostiene un'idea di conoscenza che rimane un capo saldo del pensiero scientifico fino a oggi. Egli diventa davvero il capostipite di un indirizzo filosofico originale e pregnante per tutta la filosofia occidentale [B.5] (si consideri che mentre la scuola pitagorica sosteneva la tesi sulla conoscenza che esporremo, l'intero mondo di allora vagava disordinatamente su concetti più o meno teogonici e che contemporaneo di Pitagora fu Budda il cui insegnamento fu davvero agli antipodi di quello pitagorico). Per Pitagora, grande filosofo e matematico, "*Tutte le cose che si conoscono hanno numero; senza questo nulla sarebbe possibile pensare, né conoscere*". I numeri, quindi, sono il principio di tutte le cose e il fondamento della conoscenza. Solo attraverso i numeri si può distinguere ciò che è determinato e ben definito da ciò che risulta indefinito e indeterminato. Per il nostro pensatore nell'universo l'ordine e il disordine sono controllabili solo mediante applicazioni di numeri: se la realtà è descrivibile mediante numeri, essa è ordinata, altrimenti no (Si ricordi che la scuola pitagorica era essenzialmente basata sui numeri interi e per estensione sui numeri razionali). È opinione consolidata nel mondo scientifico contemporaneo che la scuola pitagorica abbia avuto un ruolo decisivo nell'orientare il pensiero scientifico occidentale [B.5].

Parmenide (scuola eleatica, 515 - ? - V secolo - a.c. circa) pone per la prima volta con chiarezza *un problema di linguaggio e di pensiero* nella ricerca della conoscenza. *Conoscere è sinonimo di ricerca del vero,* intorno a noi, *esprimibile con un pensiero o un enunciato*. Ora si consideri una qualsiasi cosa e si pensi o si dica che "è"; rispetto a quanto dichiarato, dell'opposto, si deve dire o pensare che "non è". Ma come si può pensare reale qualcosa che non è, rispetto a quella cosa che è, senza compromettere le basi stesse del discorso, della logica? Su base puramente argomentativa (logica di allora), egli conclude che tutto ciò che "non è" è linguisticamente inaccettabile e quindi non esiste. Poiché il nulla è opposto al tutto e il tutto "è", allora il nulla non può esistere ("Quello che va oltre l'essere, non esiste; quello che non esiste è nulla; dunque (il nulla non esiste) e l'essere è uno (non essendoci altro)". Il pensiero di Parmenide mette in crisi anche l'idea che l'esperienza possa essere utile a comprendere la realtà; l'esperienza è uno strumento per conoscere pericoloso, che può indurre in errore.

Zenone - noto per i famosi paradossi matematici, probabilmente allievo di Parmenide alla scuola di Elea - la pensa come il maestro, ma va citato perché per la prima volta applica – secondo Aristotele – il metodo dialettico (diciamo formale?) per confutare o convalidare le tesi filosofiche. Il metodo di Zenone si basa sull'assumere come punto di partenza la verità di una data tesi e nel produrre sequenzialmente una serie di argomenti che – data la verità della tesi di partenza – portano a una palese contraddizione. Per cui la tesi di partenza, data l'assurdità delle conseguenze che le sono proprie, non è vera. Presentiamo alcuni di questi paradossi [B.6]. 1° Paradosso o della "dicotomia": Enunciato: "il moto esiste". Dimostrazione: un corpo mobile che partendo da A deve raggiungere il punto B, prima deve percorrere metà della distanza $|AB|$. Ma per arrivare alla metà del percorso, deve percorrere il quarto del tutto; ma prima ancora un ottavo del tutto e così via. Si constata, quindi, che la sequenza di passi risulta infinita e ciò fa concludere che in un tempo finito si dovrebbe percorrere un numero di passi infinito. Essendo ciò impossibile, non vale l'enunciato di partenza e, quindi, il movimento è impossibile. Il secondo paradosso è quello noto come "Achille e la tartaruga". Esso è analogo al precedente con la differenza che nel primo è l'inizio del movimento che è impossibile, nel secondo è la fine del movimento a essere messa in discussione: il piè veloce Achille non riuscirà mai a raggiungere la lenta tartaruga.

Per Eraclito (550-480 circa a.c.) – contemporaneo di Parmenide – la dicotomia tra l'essere e il non essere va mediata dal sottile concetto del divenire (??? = *pantá rhêi*) e perciò *conoscere si può solo se si completa l'analisi dell'essenza delle cose con l'analisi del divenire delle stesse*. [*Segue al numero 81*]

Bibliografia: [B.5] L. Corso, Pitagora e i pitagorici, MatematicaMente n. 43 luglio 2001, ed Mathesis VR; [B.3] L. Geymonat, Storia del pensiero filosofico e scientifico, Vol. 1°, Garzanti ed., 1970, Milano; [[B.??] P. Zellini, Breve storia dell'infinito, ADELPHI, 2001, Milano; [B.6] C. Boyer, Storia della Matematica, ed. Mondadori, 1987, Milano

Esame di Stato della 5ª F informatica

ITIS G. Marconi di Verona

3ª prova: statistica e R.O.

1) Si vuole stimare con il metodo di Monte Carlo il seguente integrale:

$$m = \int_1^e \left(x + \frac{2}{x} \right) \cdot dx \ .$$

Allo scopo si sceglie di usare il metodo (1°) che considera la selezione casuale delle ascisse x e che quindi determina le $n=200$ aree dei rettangoli che rappresentano il campione di osservazioni su cui stimare μ. Sia $m(y)$ la stima dell'integrale.
Quali dei seguenti enunciati sono veri:

a) La stima $m(y)$, di μ, è la media aritmetica campionaria delle $n=200$ aree campionate, ottenute dalla relazione
$y_k = (e-1)\times(x_k+2/x_k)$, per ogni $k=1, \ldots, 200$;

b) Le stime $m(y)$ di μ , provenienti da campioni estraibili con il presente schema, si distribuiscono con tendenza asintotica alla distribuzione di probabilità uniforme continua;

c) Le $n=200$ aree sperimentali che si ottengono, rappresentano un campione di osservazioni delle infinite aree della popolazione di rettangoli con media μ;

d) Gli x_k sono ascisse casuali che si ottengono usando i numeri pseudocasuali distribuiti normalmente con media 0 e varianza 1.

e) Il metodo è riferibile al teorema del valor medio di Lagrange

f) L'integrale ha valore e^2;

2) Allo scopo di verificare se una emittente locale dice il vero quando afferma che il suo indice di ascolto di un certo programma che si sviluppa in mezz'ora a partire dalle ore 22.00 è pari a p =16%, uno statistico estrae un campione di ascoltatori di programmi TV di quella fascia oraria e di quel territorio. Alla domanda "Su che canale sei sintonizzato?" il 12% risponde che è sintonizzato sul canale di quella emittente, mentre l'88% no. Se il campione di famiglie intervistate è di n= 500, si verifichi se la dichiarazione del direttore dell'emittente corrisponde al vero, al livello di affidabilità del 95%, sia nel caso che si sospetti che bari, sia nel caso che lo si ritenga onesto.

3) Se [40;46] rappresenta un intervallo di confidenza con livello di fiducia 0,95 per la media μ di una popolazione, quale delle seguenti proposizioni è vera ?

[a] La media μ della popolazione è sempre compresa tra 40 e 46;

[b] Nel 95% dei campioni la media campionaria è compresa tra 40 e 46;

[c] La probabilità che la media μ della popolazione sia compresa tra 40 e 46 vale 0,95;

[d] L'intervallo [40;46] è uno degli infiniti intervalli costruibili con la tecnica che ha portato alla costruzione dell'intervallo in esame, il 95% dei quali contiene l'ignota media μ

[e] La probabilità che la media μ della popolazione sia compresa tra 40 e 46 vale 0,95 solo se la popolazione da cui è stato prelevato il campione è normale di nota varianza σ^2.