MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 82 – agosto 2004

Potenze pari e dispari di π

di Arnaldo Vicentini

Introduzione

Per ogni k intero positivo consideriamo le serie numeriche:

$$\zeta(2k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}};\quad \Delta(2k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{2k}};$$
$$D(2k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^{2k}};\quad P(2k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^{2k}};\tag{1}$$

$$\vartheta(2k-1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^{(2k-1)}}.\tag{2}$$

Le serie convergono. Si noti che è $P(2k)=\zeta(2k)/2^{2k}$ e quindi:

$$D(2k)=\zeta(2k)-P(2k)=(1-1/2^{2k})\cdot\zeta(2k);$$
$$\Delta(2k)=D(2k)-P(2k)=(1-2/2^{2k})\cdot\zeta(2k).\tag{3}$$

È noto che per ogni k intero positivo sono razionali i rapporti $\vartheta(2k-1)/\pi^{2k-1}$ e $\zeta(2k)/\pi^{2k}$ (e quindi anche $\Delta(2k)/\pi^{2k}$), [B.1]. Il proposito di questo articolo è ricavare ricorrentemente tali rapporti mediante l'impiego d'una opportuna famiglia di funzioni periodiche $\{F_n(x)\}$ con la peculiare proprietà che per ogni n intero positivo $F_n(x)$ sia la derivata di $F_{n+1}(x)$.

La ricerca delle potenze di π

Incominciamo col considerare la serie:

$$F_1(x)=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\cdot\frac{\sin(mx)}{m}.\tag{4}$$

Per $-\pi<x<\pi$ abbiamo:

$$F_1(x)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{m}-\frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mx}}{m}=$$
$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\ln\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\ln(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})=\frac{1}{2}x.$$

$F_1(x)$ è dunque lo sviluppo in serie di Fourier dell'onda a "dente di sega" di pendenza A_0=1/2 rappresentata in Fig. 1.

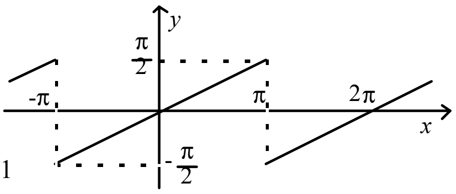

Fig. 1

Dette $F_n(x)$ le primitive successive (di ordine n-1) di $F_1(x)$ a valor medio nullo, esse sono:

$$F_{2k}(x)=(-1)^k\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{\cos(mx)}{m^{2k}}.\tag{5}$$

$$F_{2k+1}(x)=(-1)^k\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{\sin(mx)}{m^{2k+1}}.\tag{6}$$

Si noti che $F_{2k}(x)$ sono funzioni pari e $F_{2k+1}(x)$ dispari; e che $F_{2k+1}(\pi)=0$ per ogni k. Le funzioni $G_n(x)$ di cui le $F_n(x)$ sono gli sviluppi in serie di Fourier nell'intervallo $-\pi<x<\pi$ sono allora le primitive successive (di ordine n–1) di $G_1(x)=x/2$ con le stesse peculiarità: $G_{2k}(x)$ pari, $G_{2k+1}(x)$ dispari e $G_{2k+1}(\pi)=0$.
Riassumendo, le funzioni di cui le (5) e (6) sono gli sviluppi in serie di Fourier nell'intervallo tra $-\pi$ e π sono del tipo:

$$G_{2k}(x)=\sum_{r=0}^{k}A_{2(k-r)}\frac{x^{2r}}{(2r)!};\tag{7}$$

$$G_{2k+1}(x)=\sum_{r=0}^{k}A_{2(k-r)}\frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!},\tag{8}$$

con A_0=1/2 e le altre costanti A_{2j} determinate dalla condizione:

$$\forall k\in \boldsymbol{N}\setminus\{0\}\ \sum_{r=0}^{k}A_{2(k-r)}\frac{\pi^{2r}}{(2r+1)!}=0.\tag{9}$$

Espressamente, la (9) dice:

$$A_2+A_0\frac{\pi^2}{3!}=0;$$

$$A_4+A_2\frac{\pi^2}{3!}+A_0\frac{\pi^4}{5!}=0;$$

$$A_6+A_4\frac{\pi^2}{3!}+A_2\frac{\pi^4}{5!}+A_0\frac{\pi^6}{7!}=0;$$

$$A_8+A_6\frac{\pi^2}{3!}+A_4\frac{\pi^4}{5!}+A_2\frac{\pi^6}{7!}+A_0\frac{\pi^8}{9!}=0;$$

…..

Risolvendo ricorrentemente (con A_0=1/2) si trova:

$$A_2=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6};\ A_4=\frac{7}{8}\cdot\frac{\pi^4}{90};\ A_6=-\frac{31}{32}\cdot\frac{\pi^6}{945};$$
$$A_8=\frac{127}{128}\cdot\frac{\pi^8}{9450};\quad \ldots\tag{10}$$

Con tali costanti, per $-\pi<x<\pi$ risulterà $G_n(x)=F_n(x)$, ossia:

$$\sum_{r=0}^{k}A_{2(k-r)}\frac{x^{2r}}{(2r)!}=(-1)^k\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{\cos(mx)}{m^{2k}};\tag{11}$$

$$\sum_{r=0}^{k}A_{2(k-r)}\frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}=(-1)^k\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{\sin(mx)}{m^{2k+1}}\tag{12}$$

Ora, ricordando le (1) e (2), dalla (11), per $x=0$ ricaviamo:

$$A_{2k}=(-1)^k\Delta(2k)\tag{13}$$

e per $x=\pi$, tenendo conto della (13) e assumendo $\Delta(0)=A_0$:

$$\sum_{r=0}^{k}(-1)^{r+1}\Delta(2k-2r)\frac{\pi^{2r}}{(2r)!}=\zeta(2k).\tag{14}$$

Similmente, ricordando la (2), dalla (12), per $x=\pi/2$ abbiamo:

$$\sum_{r=0}^{k}(-1)^{r}\Delta(2k-2r)\frac{(\pi/2)^{2r+1}}{(2r+1)!}=\vartheta(2k+1)\ .\tag{15}$$

A titolo illustrativo, sfruttando le (10), tramite le (13), (14) e

(15), scriviamo i rapporti di $\Delta(2k)$ e $\zeta(2k)$ con π^{2k} e $\vartheta(2k\text{-}1)$ con π^{2k-1} per k da 1 a 4 e verifichiamo così la (3).

k	1	2	3	4
$\Delta(2k) / \pi^{2k}$	1 / 12	7 / 720	31 / 30240	127 / 1209600
$\zeta(2k) / \pi^{2k}$	1 / 6	1 / 90	1 / 945	1 / 9450
$\vartheta(2k\text{-}1) / \pi^{2k-1}$	1 / 4	1 / 32	5 / 1536	61 / 84320

Bibliografia: [B.1] Arnaldo Vicentini, *A proposito di* π , Atti del Congresso Nazionale Mathesis 1996 - Verona, pagg. 159÷162

LA FALLACIA

La fallacia à una argomentazione formalmente valida (in senso logico), ma non corretta. Es.: a="Marconi ha inventato la pila elettrica"; b="Marconi è morto prima del 1800"; *pertanto* c="La pila elettrica è stata inventata prima del 1800". Da a e b consegue c. Ma mentre c è comunque vera, a non è vera e b pure.

QUALCHE CASO PARTICOLARE DI ARITMETICA INFINITA

di Ruggero Ferro

Abbiamo già visto che la cardinalità dell'insieme dei naturali è uguale a quella del prodotto cartesiano dell'insieme dei naturali con se stesso. Abbiamo anche già affermato che, assumendo l'assioma della scelta, in generale la cardinalità di un insieme è uguale alla cardinalità del prodotto cartesiano di quell'insieme con se stesso, cioè $|A| = |A\times A|$. Ora vogliamo dimostrare questo risultato in molti altri casi, oltre a quello di insiemi numerabili, anche senza far ricorso all'assioma della scelta. Allo scopo ci serviranno dei risultati preliminari.

TEOREMA. Dati due insiemi infiniti A e B, se sono equinumerosi, allora sono tra loro equinumerosi anche gl'insiemi dei sottoinsiemi di A e l'insieme dei sottoinsiemi di B. Con la notazione introdotta, se $|A| = |B|$ allora $|\mathrm{P}(A)| = |\mathrm{P}(B)|$.

Dimostrazione. Sia f una biiettività tra A e B (esiste per l'ipotesi di equinumerosità dei due insiemi A e B). Si consideri la seguente funzione g da $\mathrm{P}(A)$ a $\mathrm{P}(B)$: g associa ad ogni sottoinsieme X di A il seguente insieme $Y = \{f(x): x\in X\}$. Chiaramente g è totale; g è anche iniettiva. Infatti, se X e X' sono sottoinsiemi di A tra loro diversi, allora c'è un elemento di A, lo si chiami a, tale che appartiene all'uno e non all'altro degli insiemi X e X' (si supponga che $a\in X$ e $a\notin X'$). Per definizione di g, $f(a)\in g(X)$ e, poiché f è biiettiva, $f(a)$ è diversa da $f(x)$ per ogni $x\in X'$, sicché $f(a)\notin g(X')$ e $g(X) \neq g(X')$. Inoltre g è suriettiva poiché se Z è un qualsiasi sottoinsieme di B si può considerare l'insieme $V=\{f^{-1}(y): y\in Z\}$, dal momento che f è biiettiva e dunque anche iniettiva. Evidentemente $g(V) = Z$, e, per l'arbitrarietà di Z, g è suriettiva. Avendo esibito una biiettività tra $\mathrm{P}(A)$ e $\mathrm{P}(B)$ si può dire che questi due insiemi sono equinumerosi.

Altra affermazione, utile per i risultati ai quali si sta cercando di pervenire, è quella espressa dal seguente

TEOREMA. La cardinalità del prodotto cartesiano dell'insieme dei sottoinsiemi di un insieme infinito X è minore od uguale alla cardinalità dell'insieme dei sottoinsiemi del prodotto cartesiano di $(X \cup\{c\})$ con se stesso, dove c è un elemento che non appartiene a X.

In simboli $|\mathrm{P}(X)\times\mathrm{P}(X)| \leq |\mathrm{P}((X\cup\{c\})\times(X\cup\{c\}))|$.

Dimostrazione. Il teorema chiede di mostrare che c'è una iniettività totale da $\mathrm{P}(X)\times\mathrm{P}(X)$ a $\mathrm{P}((X \cup\{c\})\times(X \cup\{c\}))$. Un elemento di $\mathrm{P}(X)\times\mathrm{P}(X)$ è una coppia ordinata (A,B) con A e B sottoinsiemi di X. Se A e B sono entrambi non vuoti, si consideri la funzione h che a (A,B) associa $A\times B$ che è un sottoinsieme di $X\times X$ e dunque anche un sottoinsieme di $(X \cup\{c\})\times(X \cup\{c\})$. Questa funzione è iniettiva poiché, se (A,B) è una coppia ordinata diversa dalla coppia ordinata (A',B') di sottoinsiemi di X, allora o A è diverso da A' o B è diverso da B'. Comunque ci sarà un elemento, sia a, che o appartiene all'uno e non all'altro tra A e A' oppure appartiene all'uno e non all'altro tra B e B'. Si supponga che $a\in A$ e $a\notin A'$, gli altri casi essendo analoghi. Allora, se b è un elemento di B (si stanno considerando solo sottoinsiemi di X non vuoti), la coppia ordinata (a,b) appartiene a $A\times B$, che è $h((A,B))$, ma non ad $A'\times B'$, che è $h((A',B'))$, sicché $h((A,B)) \neq h((A',B'))$ e h è iniettiva, come volevasi far vedere. Nel caso invece che A sia vuoto e B no, si consideri la funzione $h'=\{((\varnothing,B),\{c\}\times B): B\subset X\}$. Se invece B è vuoto e A no, si consideri la funzione $h''=\{((A,\varnothing), A \times\{c\}): A\subset X\}$. Se infine sia A che B sono vuoti, si consideri la funzione $h'''=\{((\varnothing,\varnothing),(c,c))\}$. È immediato che h, h', h'' e h''' sono iniettive e hanno domini e codomini rispettivamente a due a due disgiunti, sicché l'unione delle funzioni h, h', h'', h''' è una funzione che è totale da $\mathrm{P}(X)\times\mathrm{P}(X)$ e iniettiva. Ciò conclude la dimostrazione del teorema.

Poiché se X è infinito $|X|=|X \cup\{c\}|$, ed anche $|X\times X|=|(X \cup\{c\})\times(X \cup\{c\})|$ (come si dimostra facilmente), dall'ultimo teorema visto segue che $|\mathrm{P}(X)\times\mathrm{P}(X)| \leq |\mathrm{P}(X\times X)|$. Sfruttando anche il primo teorema, e il fatto già dimostrato che $|\mathbf{N}| = |\mathbf{N}\times\mathbf{N}|$ (dove $\mathbf{N}$ indica l'insieme dei numeri naturali), si ha che $|\mathrm{P}(\mathbf{N})| \leq$ (poiché $2 < |\mathrm{P}(\mathbf{N})|$) $|\mathrm{P}(\mathbf{N})\times\mathrm{P}(\mathbf{N})| \leq$ (per l'osservazione precedente) $|\mathrm{P}(\mathbf{N}\times\mathbf{N})| =$ (per il primo teorema mostrato) $|\mathrm{P}(\mathbf{N})|$. Dall'antisimmetria della relazione d'ordine, segue che $|\mathrm{P}(\mathbf{N})\times\mathrm{P}(\mathbf{N})| = |\mathrm{P}(\mathbf{N})|$. Infine, ricordando che $|\mathrm{P}(\mathbf{N})| = |\mathbf{R}|$ (dove $\mathbf{R}$ indica l'insieme dei numeri reali), si ottiene che $|\mathbf{R}\times\mathbf{R}| = |\mathbf{R}|$, relazione che può anche essere letta dicendo che i punti di un piano sono tanti quanti quelli di una retta, se ai primi corrispondono le coppie di numeri reali e ai secondi i numeri reali.

Altra conseguenza conseguibile dai risultati visti è la determinazione della quantità delle funzioni dai numeri naturali nei numeri naturali. Anzitutto si considerino l'insieme F delle funzioni totali dall'insieme dei numeri naturali nell'insieme dei numeri 0 e 1. Esse sono tante quante i sottoinsiemi di $\mathbf{N}$, perché la corrispondenza ϕ che ad ogni tale funzione f associa il sottoinsieme S_f dei naturali che costituiscono la controimmagine di 0 attraverso la f, $S_f = f^{-1}(0)$, cioè la funzione ϕ tale che $\phi(f) = S_f$, e la corrispondenza ψ che ad ogni sottoinsieme V di $\mathbf{N}$ associa la funzione totale f_V dall'insieme dei naturali in $\{0,1\}$ tale che $f_V(n)=0$ se $n\in V$ e $f_V(n)=1$ se $n\notin V$ (f_V è detta la funzione caratteristica dell'insieme V), cioè la funzione ψ tale che $\psi(V)= f_V$, sono una inversa dell'altra (dal momento che, per ogni $V\subset\mathbf{N}$, $\phi(\psi(V) = V$ e che, per ogni $f\in F$, $\psi(\phi(f)) = f$) e pertanto entrambe biiettività tra l'insieme delle funzioni totali da $\mathbf{N}$ in $\{0,1\}$ e l'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbf{N}$, che così hanno la stessa cardinalità.

Osserviamo ora che le funzioni totali da $\mathbf{N}$ in $\{0,1\}$ sono alcune delle funzioni da $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$, e che queste sono alcune delle relazioni binarie da $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$. Come si sa, una relazione binaria da $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$ è un sottoinsieme di $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$, sicché l'insieme della relazioni binarie ha cardinalità uguale a $|\mathrm{P}(\mathbf{N}\times\mathbf{N})|$. Quanto osservato può essere ridetto così: $|\mathrm{P}(\mathbf{N})| = |\mathrm{F}| \leq |\{f$: f è funzione da $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}\}| \leq |\{r$: r è una relazione binaria su $\mathbf{N}\}| = |\mathrm{P}(\mathbf{N}\times\mathbf{N})| = |\mathrm{P}(\mathbf{N})|$, con l'ultima uguaglianza giustificata dai risultati appena raggiunti. Grazie alla antisimmetria dell'ordine tra cardinalità si può concludere che la cardinalità dell'insieme delle funzioni da $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$ è uguale alla cardinalità dell'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbf{N}$.

Sfruttando quanto fin qui ottenuto, e argomentando in maniera analoga, si perviene anche ai seguenti risultati:

$|\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbf{N}))\times\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbf{N}))| = |\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbf{N}))|$,

$|\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbf{N})))\times\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbf{N})))| = |\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbf{N})))|$, ...

(le dimostrazioni al lettore, per esercizio).

Già precedentemente si era osservato che la somma e il prodotto di cardinalità infinite sono la più grande delle cardinalità su cui si è operato. Ciò era stato ottenuto come conseguenza del fatto che se $max\{|A|,|B|\}$ è una cardinalità infinita, allora $(max\{|A|,|B|\}\times max\{|A|,|B|\}) = max\{|A|,|B|\}$; ma si era anche osservato che questa implicazione, dimostrata se $max\{|A|, |B|\} = |\mathbf{N}|$, avrebbe richiesto una delicata dimostrazione nel caso generale. Ora non si è raggiunta una tale dimostrazione per ogni coppia di insiemi infiniti A e B, ma si è dimostrata la correttezza dell'affermazione in molti casi diversi da $\mathbf{N}$ e $\mathbf{N}$; sicché si sono estese anche a questi casi le proprietà dell'addizione e della moltiplicazione tra cardinalità infinite.