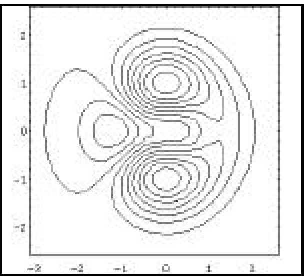
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 83 – settembre 2004



Il paradosso di Zenone e la lunghezza di Planck

di Vincenzo Zamboni

Può l'evoluzione della fisica indurci a cambiare i fondamenti del nostro pensiero o della descrizione del mondo? Probabilmente sì.

Sui banchi di scuola abbiamo tutti studiato durante le ore di filosofia, il paradosso di Zenone di "Achille e la tartaruga". Tutti i cultori di matematica lo conoscono. Si osservi, però, che la formulazione del paradosso implica il presupposto logico della continuità spaziale. Dobbiamo assumere *a priori* per vero che qualunque segmento AB sia arbitrariamente suddivisibile in più parti finite, per esempio in due parti uguali, cioè:

$$\exists\, M \in AB : \left|AM\right| = \left|MB\right| \qquad (1)$$

ove M è detto punto medio. Il postulato della suddivisibilità in due parti uguali deve essere vero quale che sia la lunghezza

$$\Delta l_n = \frac{1}{2^n} \cdot \left|AB\right| > 0\,, \qquad (2)$$

ottenuta dopo n divisioni, con $n \in \mathbf{N}$ grande a piacere.

Il paradosso è rimasto irrisolto, da un punto di vista logico, fino a quando i matematici del XVII secolo hanno dimostrato che la somma di infinite quantità infinitesime può essere finita. In particolare, lo è la somma dei tempi Δt_n necessari perché la distanza tra Achille e la tartaruga si riduca a zero; perciò Achille supera la tartaruga se la velocità v_A di quello è maggiore della velocità v_T di questa, per esempio se è $v_A=2v_T$ (3), dopo un tempo finito dalla partenza, benché sia possibile enumerare infiniti Δt_n prima che la tartaruga sia raggiunta.

Tuttavia, nel XX secolo si è fatta strada l'ipotesi che lo spazio fisico non sia continuo, bensì formato da un reticolo discreto di punti, separati tra loro da una spaziatura minima d_0, come descritto da Alfred Schild nel 1947. L'evoluzione delle teorie quantorelativistiche sembra fissare il limite inferiore di d_0 alla lunghezza di Planck, $l_p \cong 10^{-33}\ cm$, asserendo che nessuna dimensione fisica possa contrarsi al di sotto di tale lunghezza. Siamo costretti ad ammettere, allora, che la relazione tra la velocità di A (Achille) e T (tartaruga) non sia più esprimibile esattamente - come nella (3) - ma solo approssimativamente (e quindi $v_A \cong 2v_T$, nel caso di velocità doppia).

Ad esempio, quando la distanza tra A e T sia definita da $d_{AT} = (2n+1)l_p = k{\cdot}l_p$, nÎN (4), cioè da un numero dispari di lunghezze di Planck, la successiva distanza non può più essere

$$d'_{AT} = \frac{k}{2} \cdot l_p = \frac{2n+1}{2} \cdot l_p \qquad (5)$$

bensì

$$d'_{AT} = \frac{2n}{2} \cdot l_p \quad \text{oppure} \quad d'_{AT} = \frac{2n+2}{2} \cdot l_p = (n+1) \cdot l_p \qquad (6)$$

Abbiamo, dunque, un caso di indecisione. Se a un dato istante A dista da T 17 lunghezze di Planck, la distanza successiva può essere $8 \cdot l_p = ((17-1)/2) \cdot l_p$ oppure $9 \cdot l_p = ((17+1)/2) \cdot l_p$, ma non $(17/2) \cdot l_p = 8{,}5 \cdot l_p$. In altri termini, Achille raggiungerà comunque la tartaruga, ma una leggera incertezza dell'ordine di $\Delta l \approx l_p$ ci impedirà, in ogni istante, di definire esattamente la distanza tra i due.

La teoria delle stringhe sembra obbligarci ad accettare uno spazio discreto, con una conseguente indeterminazione spaziale, definita dalla (6), così come per la velocità.

Bibliografia: [B.1] Alfred Schild, *Physical Review*, 1947; [B.2] Lucio Lombardo Radice, *L'infinito*, Feltrinelli, Milano; [B.3] Gerhard Staguhu, *Breve storia dell'atomo*, Salani, 2002; [B.4] Paolo Di Sia, *Geometria alla scala di Planck*, MatematicaMente n. 76, Verona, 2004.

MATHESIS

Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche
Sezione di Verona

ITIS G. Marconi di Verona

Venerdì 5 Novembre Ore 10.45 – 12.45
Presso l'aula magna dell'ITIS G. Marconi
Piazzale R. Guardini n. 1 - Verona
Incontro sul tema:

Unificazione delle due culture

Relatore: Giulio Giorello, docente di Filosofia della Scienza presso l'Università degli Studi di Milano

L'incontro è aperto a studenti e docenti.

Una costruzione di Enrico D'Ovidio

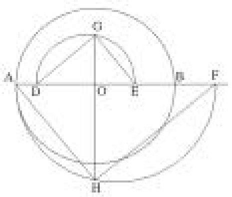
di Antonio Caseario [*]

L'insegnamento della geometria razionale nella scuola attuale è talmente ridotto che difficilmente il docente affronta il classico problema della quadratura del cerchio. Tuttavia egli, se volesse approfondire l'argomento, potrebbe presentare agli studenti una costruzione geometrica del grande matematico campobassano Enrico D'Ovidio, semplice e ingegnosa, che fornisce un quadrato la cui area approssima grandemente quella di un dato cerchio. Infatti, come è noto il problema non si può risolvere esattamente con riga e compasso.

La costruzione è esposta nel testo *Elementi di Geometria* (1) che D'Ovidio (1843-1933) pubblicò nel 1869, assieme al Sannia, e per la sua originalità è riportata anche nell'enciclopedia *Questioni riguardanti le matematiche elementari* di Federigo Enriques.

1) Costruzione di D'Ovidio

Sul diametro AB di un cerchio dato (vedi figura), si riporti il segmento OD = (3/5)$\cdot AO$ e dalla parte opposta il segmento OF = (3/2)$\cdot AO$. Sia E il punto medio di OB. Si descrivano, da bande opposte rispetto ad AB i semicerchi di diametro DE e AF.



Si conduca per O la perpendicolare ad AB che incontri i due semicerchi nei punti G e H. Ebbene il segmento GH è il lato del quadrato voluto.

Dimostrazione. Posto $AO = r$, per la costruzione fatta, si ha: OF = (3/2)$\cdot r$, OD = (3/5)$\cdot r$, OE = (1/2)$\cdot r$. Dai triangoli DGE e AHF rettangoli (perché inscritti in semicerchi) abbiamo rispettivamente, per il 2º teorema di Euclide, le due proporzioni: $OE : OG = OG : DO$ e $AO : OH = OH : OF$.

Da queste ricaviamo: $OG = r\cdot\sqrt{3/10}$ e $OH = r\cdot\sqrt{3/2}$ e,quindi,

$$GH = GO + OH = \left(\sqrt{\frac{3}{10}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) r = 1{,}7724674... \cdot r \ .$$

E poiché il lato del quadrato equivalente al cerchio dato è $r\cdot\sqrt{\pi}$ = $r\cdot 1{,}7724538\ldots$, GH differisce da esso, per eccesso, per meno di $2\cdot 10^{-5}\cdot r$, dato che $(\sqrt{0{,}3}+\sqrt{1{,}5})-\sqrt{\pi}$ vale circa 1,7724674 – 1,7724538 = 0,0000146 < $2\cdot 10^{-5}$. Si osservi anche che

$$\left(\sqrt{0{,}3} + \sqrt{1{,}5}\right)^2 = \left(1{,}8 + 0{,}6\sqrt{5}\right)\Big/5 = 3{,}1416407...$$

costituisce una buona approssimazione del famoso numero π=3,1415926…, da cui differisce per eccesso per meno di 5 centomillesimi.

(1) Questo testo di geometria elementare per i licei ebbe 14 edizioni e rimase in adozione per oltre 50 anni nelle scuole italiane.

[*] Liceo Artistico "G. Manzù" – CB. L'articolo è stato tratto da Mathmese n. 1 anno 1 - maggio 2002, Mathesis di Campobasso.

Implicazioni logiche e sistemi di equazioni algebriche

di Luigi Landra [**]

Siamo abituati, per le caratteristiche dei programmi dei corsi scolastici a suo tempo frequentati, ad eseguire calcoli algebrici non associati alla risoluzione di particolari problemi della vita pratica e perciò siamo inconsciamente portati a svalutare la loro efficacia nel considerarli come validi ragionamenti.

Risulta interessante mettere in evidenza le numerose implicazioni materiali che sono insite nei procedimenti di risoluzione di sistemi di equazioni algebriche. Si constata, così facendo, la potenza del calcolo algebrico che, con l'applicazione di semplicissime regole, ci permette di fare senza difficoltà molti ragionamenti, senz'altro validi, che però possono sembrare, a prima vista, anche complessi e, perciò, poco convincenti. Seguendo cioè, per la loro risoluzione, la via del calcolo proposizionale della logica matematica ci accorgeremmo della abbondanza di ragionamenti necessari per giungere ad una completa giustificazione di ogni risoluzione di un problema. A questo riguardo è molto istruttivo prendere in considerazione il seguente problema, definito di logica, proposto ai lettori del settimanale GENTE nel n. 26 del 23 giugno 2004, a pag. 158: "Antonio ha tanti anni quanto Bernardo e Carlo messi insieme. Un anno fa Bernardo aveva il doppio degli anni di Carlo. Fra due anni Antonio avrà il doppio degli anni attuali di Bernardo. Quanti anni hanno, rispettivamente, Antonio, Bernardo e Carlo?"

Per un matematico viene spontaneo risolvere un problema del genere, nelle cui premesse si notano tre uguaglianze, non con l'utilizzo di implicazioni logiche, più precisamente implicazioni materiali, ma con l'utilizzo del seguente sistema di equazioni, dove si considera x l'attuale età di Bernardo, y l'attuale età di Carlo e z l'attuale età di Antonio:

$$\begin{cases} z = x + y \\ x - 1 = 2\cdot(y-1) \\ z + 2 = 2\cdot x \end{cases}$$

Esso è risolto dà: x = 5; y = 3; z = 8. Perciò Antonio ha 8 anni, Bernardo 5 e Carlo 3.

Nello stesso numero viene fornita la seguente soluzione del suddetto problema: "Considerato che un anno fa Bernardo aveva il doppio degli anni di Carlo, appare evidente che i due sono dei bambini. Stabilito ciò, con pochi tentativi si arriva alla soluzione: Antonio ha 8 anni, Bernardo 5 e Carlo 3. Non esiste un altro gruppo di tre numeri che soddisfi l'enunciato del problema". Come immediatamente si nota, si deve pervenire alla sua soluzione con opportuni ragionamenti che in logica simbolica, come è già stato ricordato, corrispondono ad implicazioni materiali, dopo però aver fatto anche altre elementari considerazioni che prescindono da algoritmi della logica sinora presi in considerazione dagli studiosi, ma che la nostra mente sa utilizzare nei momenti più opportuni, come la circostanza che il problema proposto non può avere che una soluzione con numeri piccoli e perciò individuabili con pochi tentativi.

Passiamo ora a risolverlo con il calcolo proposizionale. Con le seguenti proposizioni, di cui le prime tre rappresentano le ipotesi fornite dal problema, è possibile elencare tutte le implicazioni materiali che ci portano alla predetta soluzione dove, tra parentesi, vengono anche indicati i corrispondenti significati con delle espressioni algebriche:

A: Oggi Antonio ha tanti anni quanto Bernardo e Carlo messi insieme; ($z = x + y$).
B: Un anno fa Bernardo aveva il doppio degli anni di Carlo; ($x-1 = 2(y-1)$).
C: Tra due anni Antonio avrà il doppio degli anni attuali di Bernardo; [$(x+y)+2 = 2x$].
D: L'età di Bernardo è uguale a quella doppia di Carlo meno un anno; ($x = 2y - 1$).
E: L'età di Bernardo è uguale a quella di Carlo aumentata di due anni; ($x = y+2$).
F: L'età di Carlo meno un anno è uguale a 2; ($y - 1 = 2$).
G: Carlo ha 3 anni ($y = 3$).
H: Bernardo ha 5 anni. ($x = 5$). I: Antonio ha 8 anni. ($z = 8$).

Ecco la successione delle implicazioni materiali che ci portano alla soluzione del problema e alle quali segue la relativa formalizzazione dapprima come equazione, in algebra elementare, e poi come implicazione materiale nel calcolo delle proposizioni della logica:

1. Se un anno fa Bernardo aveva il doppio degli anni di Carlo, allora oggi l'età di Bernardo è uguale a quella doppia di Carlo meno un anno ($x = 2y - 1$) ; $B \Rightarrow D$.
2. Se tra due anni Antonio avrà il doppio degli anni attuali di Bernardo, allora, togliendo l'età attuale di Bernardo ai due termini dell'uguaglianza, risulta che l'età di Bernardo è uguale a quella di Carlo aumentata di due anni ($x+y+2 = 2x$; $x = y+2$) ; $C \Rightarrow E$.
3. Se l'età di Bernardo è uguale a quella doppia di Carlo meno un anno ma anche uguale a quella di Carlo aumentata di 2 anni, allora, se togliamo da ambo i membri dell'uguaglianza l'età attuale di Carlo, rimane nel primo membro l'età di Carlo meno un anno mentre 2 rimane nel secondo membro (y–1=2); $(D \wedge E) \Rightarrow F$.
4. Se l'età di Carlo meno un anno è uguale a 2, allora Carlo ha 3 anni, essendo 2+1=3; $F \Rightarrow G$.
5. Se l'età di Bernardo è quella di Carlo aumentata di 2 anni e quella di Carlo è 3 anni, allora
6. Bernardo ha 5 anni; [3+2=5]; $(E\wedge G) \Rightarrow H$.
7. Se Antonio ha tanti anni quanto Bernardo e Carlo messi insieme, allora Antonio ha 8 anni; [5+3=8]; $(A\wedge G\wedge H) \Rightarrow I$.

Confrontando le trasformazioni algebriche che vengono effettuate per seguire i ragionamenti con l'utilizzo delle implicazioni materiali, con quelle ordinarie del calcolo algebrico si notano evidenti rallentamenti dovute al fatto che certe possibili trasformazioni algebriche è difficile giustificarle con appropriate proposizioni.

Infine, l'unicità della terna che risolve il problema è garantita dal fatto che le date tre condizioni cui sottoporre le incognite (a) esprimono legami lineari tra le stesse e (b) sono logicamente indipendenti (danno effettivamente tre distinte informazioni): il che risulta un caso particolare del teorema fondamentale dell'algebra lineare (detto di Rouché-Capelli) dal quale segue che un sistema di n equazioni lineari in n incognite e linearmente indipendenti risulta determinato – cioè risolubile e con soluzione unica [L'indipendenza lineare delle equazioni, come è noto, significa che non esiste combinazione lineare dei primi membri che uguagli identicamente la stessa combinazione lineare dei secondi membri].

[**] Presidente della sezione Mathesis di Seregno (MI)