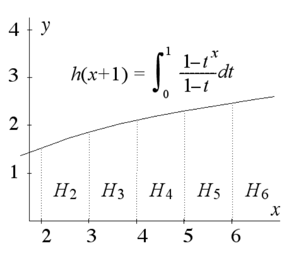
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 84 – ottobre 2004



Punti di vista sulla conoscenza

di Luciano Corso

[*Segue dal n. 81*]

Un merito del pensiero di Descartes (Cartesio) è di aver posto in modo chiaro il principio del *dubbio critico* come base di ogni processo cognitivo. Questo consentì di basare l'analisi dei fenomeni naturali su elementi reali piuttosto che su riferimenti bibliografici antichi o su punti di visti ideali. È il dubbio critico che lo mise nella posizione di chi, dubitando infine di tutto, salva almeno un punto di partenza: quello che, essendo egli essere pensante, deve pur esistere (*Cogito, ergo sum*).

Blaise Pascal (1623-1662) affronta solo indirettamente il problema della conoscenza. Egli evidenzia un duplice aspetto dei modi di conoscere. Il primo è riferibile alla capacità dell'uomo di speculare sotto l'aspetto logico e razionale e questa sua capacità dipende da *l'esprit géométrique* [B.8]; questa abilità però non consente di conoscere tutto ciò che si muove nell'animo umano e si può esperimentare durante la vita; essa pare rivolta soprattutto a persuadere, a convincere della bontà di affermazioni contenenti presunte verità. *L'esprit de géométrie* serve o a dimostrare la verità quando la si possiede, o a discernere il falso che si cela nell'enunciato che la dichiara. È sull'*argomentazione* che si concentra tutta la forza persuasiva del metodo razionale (*esprit géométrique*) perché esso è l'unico modo per salvare la correttezza formale e sostanziale di quanto si vuole enunciare. Il secondo aspetto è, invece, legato a una profonda *capacità intuitiva* dell'uomo. L'intuizione (*esprit de finesse*) consente di cogliere verità, e quindi di acquisire conoscenza, che non sono propriamente legate a un metodo rigorosamente logico-razionale. L'intuizione è la manifestazione di una sensibilità profonda del «cuore» che sa cogliere un'essenza dello stato del mondo non percepibile dalla razionalità pura. Pascal, da uomo di scienza, argomenta molto bene sulla questione e risulta convincente la necessità di possedere entrambe le abilità per permettere di fare salti in avanti alla conoscenza (non solo scientifica). Dalla lettura degli scritti di Pascal, stupisce come egli abbia saputo fondere in un tutto unitario la parte logico-razionale del suo ingegno, con quella mistica che, come è noto, ha rappresentato un elemento fondamentale della sua speculazione. È importante ricordare alcuni contributi scientifici (ma anche sostanzialmente filosofici) della sua opera: 1) affrontò per la prima volta e in modo chiaro ed esemplare il problema del calcolo automatico meccanizzato (famosa è la prima macchina calcolatrice, realizzata grazie ai suoi studi, detta *pascaline*); 2) fu precursore degli studi riguardanti il calcolo delle probabilità; 3) fu induttore della nascita dell'analisi infinitesimale. Inutile dire quanto siano stati fondamentali gli stimoli indotti dalle sue riflessioni in questi tre campi d'indagine.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) respinge l'intuizionismo cartesiano (quello che porta ad affermare che è l'evidenza l'unico reale portatore di conoscenza, e percorre una strada diversa. Per Leibniz la conoscenza di una verità si fonda su un rigoroso ragionamento. Esso può essere stabilito solo attraverso *un chiaro formalismo applicato a una argomentazione* [B.9]. La conoscenza diventa espressione di verità logica, analitica o di ragione. Egli sostiene che in ogni predicato vero, il predicato deve inerire al soggetto e che quindi la logica formale permette di scoprire se questa inerenza esiste o no. Il saper discriminare tra il vero e il falso, base della conoscenza, diventava quindi il risultato di un automatismo logico, in un certo senso dipendente da un possibile calcolo. È convinzione di Leibniz che possa esistere e sorgere una *mathesis universalis* costituita dalle regole della matematica e della logica basate su un linguaggio formale che consenta in modo definitivo di redimere controversie e ambiguità argomentative, così da ipotizzare che verrà un giorno in cui di fronte a una contesa filosofica, o di altro genere, basterà dire pacatamente: *Calculemus*! E tutto verrà chiarito [B.10]. Leibniz, però, comprende che la conoscenza si può esprimere anche in altri modi. Questi modi si manifestano direttamente, immediatamente, senza costruzioni mentali. Chiamò queste verità, verità storiche o di fatto. Esse possono con immediatezza dare conoscenza. Per esempio: "Il tavolo è quadrato" o "Tizio è morto ieri". [*Segue al numero 87*]

Bibliografia: [B.8] Blaise Pascal, *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*, Oevres complètes, Gallimard, 1954, France; Blaise Pascal, *Pensées*; [B.9] Ludovico Geymonat, *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Vol. 2°, Garzanti, 1970, Milano; [B.10] Umberto Bottazzini, *Il flauto di Hilbert*, UTET, Torino, 1990

La serie armonica e la costante γ.

di Arnaldo Vicentini

Richiamo

Si indichi con H_n la somma dei reciproci degli interi da 1 a n, cioè la ridotta n-esima della serie armonica. È noto che questa diverge col carattere di $ln(n)$. Precisamente:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} [H_n - ln(n)] = costante = \gamma . \qquad (1)$$

Ciò si prova considerando le successioni $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ in cui:

$$f_n = H_n - ln(n+1); \quad g_n = H_n - ln(n) . \qquad (2)$$

Per la prima abbiamo:

$$f_n - f_{n-1} = \frac{1}{n} - ln\frac{n+1}{n} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot \frac{1}{n^k} > 0 \ .$$

[NB. Tranne $x = 0$, è $e^x > 1+x$, ossia $x > ln(1+x)$]. Per la seconda:

$$g_n - g_{n-1} = \frac{1}{n} - ln\frac{n}{n-1} = -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{n^k} < 0 \ .$$

Dunque $\{f_n\}$ è crescente e $\{g_n\}$ decrescente. Inoltre:

$$g_n - f_n = ln\left((n+1)/n\right) > 0; \quad \lim_{n\to\infty} (g_n - f_n) = 0 \ .$$

Pertanto le due successioni tendono allo stesso limite finito γ. Lo scopo del presente lavoro è la simulazione rapida ed accurata di H_n per una via inconsueta che passa per la valutazione accurata della costante γ (cui mal si prestano le successioni (2): troppo lenta la loro convergenza a γ).

La valutazione accurata di γ e di H_n

Siccome la successione $\{g_n\}$ di cui in (2) è convergente e decrescente, la differenza $d(n)$ tra il termine corrente g_n ed il limite γ è una funzione positiva di n infinitesima al tendere di n all'infinito.

$$d(n) = H_n - ln(n) - \gamma > 0;\ \lim_{n\to\infty} d(n) = 0\,. \qquad (3)$$

Riscrivendo la (3) in n-1 e sottraendo membro a membro la (3) stessa si ha:

$$d(n-1) - d(n) = -\frac{1}{n} - ln\frac{n-1}{n} = \sum\nolimits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{n^k}\,. \qquad (4)$$

Si cerchi se è possibile rappresentare $d(n)$ con una serie di potenze di $1/n$:

$$d(n) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_r}{n^r} \Rightarrow \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_r}{n^r}\left[\frac{1}{(1-1/n)^r} - 1\right] = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{n^k}\,. (5)$$

Per determinare le incognite a_r, – dato che pochi ricordano la serie binomiale! – deriviamo r-1 volte l'identità:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... = \sum\nolimits_{h=0}^{\infty} x^h$$

(valida per per $|x| < 1$). Per $r > 1$ otteniamo:

$$\frac{(r-1)!}{(1-x)^r} = \sum_{h=0}^{\infty} x^h \prod_{j=1}^{r-1}(h+j) \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{h=0}^{\infty}\binom{h+r-1}{r-1}\cdot x^h\,.$$

La (5) è dunque verificata se:

$$\forall k \in N\setminus\{0,1\} \sum\nolimits_{r=1}^{k-1}\binom{k-1}{r-1}\cdot a_r = \frac{1}{k}\,.. \qquad (6)$$

La (6) definisce un sistema lineare di infinite equazioni risolubile ricorrentemente:

$$\begin{aligned} &a_1 = 1/2;\\ &a_1 + 2a_2 = 1/3;\\ &a_1 + 3a_2 + 3a_3 = 1/4;\\ &a_1 + 4a_2 + 6a_3 + 4a_4 = 1/5;\\ &... \end{aligned} \qquad (7)$$

I primi 12 coefficienti a_r risultano:
$a_1 = 1/2$; $a_2 = -1/12$; $a_4 = 1/120$; $a_6 = -1/252$; $a_8 = 1/240$; $a_{10} = -1/132$; $a_{12} = 691/32760$; $a_3 = a_5 = a_7 = a_9 = a_{11} = 0$.
In *Appendice* mostreremo che è nullo ogni coefficiente di indice dispari tranne a_1.
Intanto, dalla (3), abbiamo, per ogni n>1:

$$\gamma = H_n - ln(n) - \sum\nolimits_{r=1}^{\infty}\frac{a_r}{n^r}\,. \qquad (8)$$

Si noti che basta arrestare la somma ad $r = 8$ per avere un'ottima accuratezza su γ anche per n piccolo. Per esempio, per n=10 (e $H_{10} = 7381/2520$), essendo $a_9 = 0$ e $a_{10} = -1/132$, l'errore su γ risulta dell'ordine di 1E-12, il che significa un γ con 11 cifre esatte: γ= 0,57721566490...
Noto γ, la (8) dà subito:

$$H_n = ln(n) + \gamma + \sum\nolimits_{r=1}^{\infty}\frac{a_r}{n^r}\,. \qquad (9)$$

Siccome $a_1 = 1/2$, il trascurare la serie correttiva nella (8) e nella (9) comporta un errore dell'ordine di $1/(2n)$. Per esempio, l'approssimare H_{5000} con $ln(5000) + \gamma$ dà solo 4 cifre esatte.

Appendice

a) Prova che nello sviluppo di H_n–$ln(n)$–γ in serie di potenze di $1/n$ è nullo ogni coefficiente a_r di indice dispari tranne a_1.
Sostituendo nella (4) n con n+1 si ha:

$$d(n) - d(n+1) = -\frac{1}{n+1} - ln\frac{n}{n+1}\,. \qquad (4\ \text{bis})$$

Per $d(n)$ come in (5), il primo membro di (4 bis) vale:

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{a_r}{n^r}\left[1 - \frac{1}{(1+1/n)^r}\right] = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \sum_{h=1}^{\infty}\binom{h+r-1}{r-1}\frac{(-1)^{h-1}}{n^{h+r}} =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{n^k}\sum_{r=1}^{k-1}(-1)^{r-1}a_r\binom{k-1}{r-1}.$$

Lo sviluppo in serie del secondo membro di (4 bis) dà:

$$-\frac{1}{n+1} - ln\frac{n}{n+1} = \sum\nolimits_{k=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\frac{(-1)^k}{n^k}\,.$$

L'uguaglianza (4 bis) è allora soddisfatta se e solo se:

$$\forall k \in N\setminus\{0,1\}\sum\nolimits_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}\cdot\binom{k-1}{r-1}\cdot a_r = 1 - \frac{1}{k} \qquad (6\ \text{bis})$$

cioè:

$$\begin{aligned} &a_1 = 1 - 1/2;\\ &a_1 - 2a_2 = 1 - 1/3;\\ &a_1 - 3a_2 + 3a_3 = 1 - 1/4;\\ &a_1 - 4a_2 + 6a_3 - 4a_4 = 1 - 1/5;\\ &... \end{aligned} \qquad (7\ \text{bis})$$

Sommando membro a membro ogni equazione di (7 bis) con la corrispondente di (7), si elidono tutte le incognite di indice pari, raddoppiano i coefficienti di quelle di indice dispari e il membro destro risulta costantemente 1. Essendo $2a_1 = 1$, la cosa è possibile se e solo se $a_r = 0$ per ogni r dispari maggiore di 1.
b) Il membro destro della (9), sostituendovi l'intero n con un reale x, definisce una funzione $H(x)$ continua in ogni $x > 1$ che vale H_n dove x è intero di valore $n > 1$. Si dica $h(x)$ la funzione:

$$h(x) = \int_0^1\left[\left(1 - t^{x-1}\right)\Big/\left(1-t\right)\right]dt\,. \qquad (10)$$

Per essa si ha:

$$h(x+1) = 1/x + h(x);\ \ h(n+1) = H_n\,. \qquad (11)$$

Dunque, per $x > 1$, $H(x)$ vale $h(x+1)$. La cosa ha una certa analogia con la funzione Γ per la quale $\Gamma(n+1) = n!$ Precisamente, la funzione discreta $n!$ è asintoticamente approssimata dalla funzione continua di Stirling $x^x e^{-x}\sqrt{(2\pi x)}$ per $x = n$; e la funzione discreta H_n è asintoticamente approssimata dalla funzione continua $ln(x)+\gamma$ per $x = n$. La funzione di Stirling si può correggere in $\Gamma(x+1)$ (in modo che quando la variabile x è intera di valore $n > 1$ la funzione valga esattamente $n!$) con un fattore che è l'esponenziale di una serie di potenze di $1/x$, [B.1]; e la funzione $ln(x)+\gamma$ si può correggere in $H(x) = h(x+1)$ (in modo che quando la variabile x è intera di valore n la funzione valga esattamente H_n) con un addendo che è una serie di potenze di $1/x$. Il metodo impiegato in [B.1] per determinare i coefficienti della serie che corregge la funzione di Stirling è del tutto analogo a quello qui impiegato per la serie che corregge la funzione $ln(x)+\gamma$. sviluppo in serie di potenze dell'errore sfruttando la conoscenza della variazione dell'errore tra due interi consecutivi. Anche in quel caso i coefficienti della serie risultano alternativamente nulli, e la prova di ciò è ottenuta in [B.1] in maniera analoga a quella del presente caso.

[B.1]. Arnaldo Vicentini, *Simulazione accurata della funzione Γ*, Atti del Congresso Nazionale della Mathesis 1997 - Caserta, pagg. 401÷408.

La Scienza e i «malintesi metafisici»

È noto che gli uomini si vogliono bene e, se possono, se ne fanno molto. Gli uomini di scienza non sono una eccezione, anzi. Spesso tra di loro nascono degli equivoci dovuti a pregiudizi interpretativi su quanto altri scrivono o enunciano. Leggiamo quanto scrisse De Finetti al riguardo e con riferimento all'allora nascente concetto di probabilità soggettiva. «Occorre, intanto, menzionare, per chi non lo sapesse, che nella concezione qui seguita e sostenuta esistono soltanto *probabilità soggettive*: *grado di fiducia* […] di un dato soggetto, in un dato istante e con un dato insieme d'informazioni, riguardo al verificarsi di un evento. Ciò si contrappone ad altre concezioni che si limitano a speciali tipi di casi in cui esse attribuiscono un senso a delle "probabilità oggettive" […]. Detto ciò, bisogna subito aggiungere che non interessa affatto, per ora almeno, una discussione o una presa di posizione sugli aspetti filosofici della disputa: sarebbe anzi cosa prematura e pregiudizievole perché invischierebbe l'esame di ogni punto concreto in un viluppo di malintesi metafisici».

Bibliografia: Bruno De Finetti, Teoria delle probabilità, Vol. 1 pag, 6, G. Einaudi, Torino, 1970.