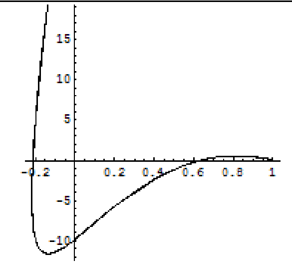
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 85 – novembre 2004



L'approssimazione classica dell'equazione di Schrödinger

di Vincenzo Zamboni

Nei problemi di meccanica quantistica non relativistica si cerca di pervenire a soluzioni esatte per la funzione d'onda $\psi(x,t)$ risolvendo la ben nota equazione di Schrödinger. In alcuni casi, l'espressione analitica dei potenziali in cui è immersa la particella permette di trovare una soluzione esatta. Tuttavia, in generale, la situazione non è così semplice. Spesso si deve ricorrere a metodi di approssimazione. Uno di questi, il metodo di approssimazione classica, è applicabile quando la costante di Planck contribuisca in modo irrilevante, e precisamente quando

$$h/2m \cong 0\ . \tag{1}$$

Sia infatti $\psi(x,t)$ la funzione d'onda di una particella in un potenziale $V(x)$. Essa deve ob-bedire all'equazione

$$i\hbar\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+V(x)\cdot\psi \tag{2}$$

Possiamo scrivere ψ nella forma conveniente

$$\psi(x,t)=A(x,t)\cdot e^{\frac{i}{\hbar}\cdot S(x,t)} \tag{3}$$

con A e S funzioni reali. Esse soddisfano, come si vede facilmente, le equazioni

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{1}{m}\cdot\frac{\partial A}{\partial x}\cdot\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{1}{2m}\cdot\frac{A\cdot\partial^2 S}{\partial x^2}=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2\cdot m}\cdot\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+V(x)=\frac{\hbar^2}{2\cdot m}\cdot\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \tag{5}$$

Le (4) e (5) si ottengono sostituendo (3) in (2) e separando poi le parti reali da quelle immaginarie. Moltiplicando la (4) per la (2) otteniamo (essendo $\partial_t A^2=2\cdot A\cdot\partial_t A$)

$$\frac{\partial\left(A^2\right)}{\partial t}+\frac{1}{m}\cdot\frac{\partial\left(A^2\frac{\partial S}{\partial x}\right)}{\partial x}=0 \tag{6}$$

e questa non è altro che una equazione di continuità, ove si identifichino la densità di probabilità e la densità di corrente di probabilità rispettivamente con

$$P(x,t)=A^2 \tag{7}$$

$$J(x,t)=\frac{1}{m}\cdot A^2\cdot\frac{\partial S}{\partial x} \tag{8}$$

L'equazione (4) non contiene $\hbar$, La (5), invece, può essere risolta con l'approssimazione classica se si trascuri il termine $\hbar$, il che è possibile se si verifica la condizione (1), che, data la relazione ondulatoria

$$p=\hbar/\lambda \qquad ; \qquad \lambda=\hbar\Big/\left(2\cdot m\cdot(E-V)\right)^{1/2} \tag{9}$$

equivale a dire che stiamo considerando lunghezze d'onda opportune. Con l'approssimazione introdotta, la (5) diventa

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2+V=0 \tag{10}$$

Richiamando la meccanica dei fluidi, $P(x,\ t)$ può essere assimilato a un fluido di probabilità, e seguendo il punto x nel corso del tempo (punto di vista euleriano) possiamo scrivere

$$P=P(t,x(t)) \tag{11}$$

da cui, derivando, otteniamo la velocità come

$$v=\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x} \tag{11b}$$

e la (10) diventa

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2+V=0 \tag{12}$$

Derivando rispetto a x si produce, dopo qualche passaggio

$$\frac{d(mv)}{dt}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

che è esattamente l'equazione del moto della meccanica classica newtoniana.
Allora, abbiamo verificato che l'equazione di Schrödinger contiene in sé la teoria di Newton come caso limite, corrispondente ai fenomeni in cui la costante di Planck sia trascurabile. E abbiamo anche trovato il modo di scomporre la funzione d'onda in due parti (A e S) che obbediscono a equazioni più semplici di quella di Schrödinger, utilizzabili quando h contribuisca in modo irrilevante. Vi sono varie applicazioni concrete nelle quali, di fatto, ci si deve accontentare di questa approssimazione. Si può constatare che la condizione di validità di questa approssimazione è

$$\left|\frac{\lambda^2}{4}\cdot\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right|\ll 1 \tag{13}$$

che deve essere soddisfatta per tutte le x. Si riconosce facilmente in questa equazione la condizione di validità dell'ottica geometrica rispetto alla formulazione ondulatoria, confermando, così, il legame tra meccanica quantistica e ottica classica.

Bibliografia: [B.1] J. Chahohud e P. Castelvetri, *Meccanica quantistica*, Coop. Universitaria Bologna, 1970; [B.2] Landau e Lifsitz, *Meccanica quantistica*, Mir Mosca - editori Riuniti, 1976; [B.3] A. Messiah, *Mecanique Quantique*, Dunod, Paris, 1959; [B.4] Giulio Passatore, *Problemi di Meccanica quantistica*, ed. F. Angeli, Milano, 1975; [B.5] Dario Graffi, *Meccanica razionale*, Patron, Bologna, 1973; [B.6] A. Kitagorodsky, *Introduction to Phisics*, Mir Publ, Mosca, 1963.

Non due culture, ma una sola

di Luciano Corso

Il prof. Giulio Giorello, docente di Filosofia della Scienza presso l'Università degli Studi di Milano, il 5 novembre è venuto all'ITIS G. Marconi di Verona, invitato dalla Mathesis veronese, e, in un'aula magna gremita di pubblico, ha parlato del problema dei due diversi orientamenti culturali presenti in Italia: quello umanistico in senso artistico, storico, letterario e filosofico e quello scientifico e tecnologico. Questa bivalenza della scuola e della cultura italiana genera carenza di comunicazione tra i due mondi, cosicché oggi sempre di più essi si separano e si allontanano. Il mondo dei giovani, per natura polivalente negli interessi ma pigro negl'impegni, è costretto a scegliere e spesso si orienta verso quell'indirizzo che costa minor fatica, sicché è scarsa l'opportunità di tenere unito il cosmo del sapere. Mentre il mondo pare sempre più rivolto verso lo sviluppo della ricerca scientifica e delle sue applicazioni tecnologiche, molti giovani preferiscono studiare discipline non scientifiche. La previsione che se ne può trarre è che tra qualche decennio sempre meno persone saranno in grado di capire il valore dei risultati scientifici e tecnici e sempre più uomini avranno una profonda diffidenza delle scoperte scientifiche e delle applicazioni che potranno avere.

Da dove deriva questa dicotomia? Anche in questo caso bisogna guardare alla storia, dice Giorello. In passato questa accentuata divisione dei ruoli non esisteva e molti *human of art* erano eccellenti in entrambi i settori della conoscenza. Basti pensare a Dante Alighieri, a Galileo Galilei, a Blaise Pascal, a Leibniz, a Newton, a Leopardi, agli enciclopedisti francesi, a Calvino e via fino ai nostri giorni che presentano cultori e dottori delle scienze matematiche e fisiche abilissimi in letteratura, in filosofia e nelle conoscenze musicali e teologiche. Sappiamo che Galilei – sostiene Giorello - amava Dante e leggeva spesso i brani della Divina Commedia; sappiamo che Leopardi nella sua grande erudizione, aveva una notevole conoscenza e abilità in molti settori delle scienze e in particolare della matematica che molto hanno influito sulla sua poesia. Leibniz era versatile al massimo e parlava di diritto e di politica con la stessa scioltezza con cui presentava le sue innovazioni nel campo dell'analisi e della logica matematica. Riconosciamo la raffinatezza umanistica di Heisemberg che oltre a essere stato un fisico eccellente fu anche un profondo conoscitore della musica. È solo recentemente che il divario tra cultura umanistica non scientifica e cultura umanistica scientifica e tecnica ha subito un pesante distacco. Perché? Entriamo nel mondo delle opinioni.

Una delle splendide poesie dell'universo

La legge di gravitazione universale di I. Newton, nella sua ermetica, elegante e completa forma espressa dalla seguente relazione:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

rappresenta una sintesi sublime della potenza interpretativa del pensiero umano riguardante il cosmo e il mistero che lo accompagna. Nessuno, oggi, può più guardare il cielo con ingenuità. Occorre tener conto di questa scoperta. L'occhio che nelle notti stellate guarda il firmamento rimane affascinato e colpito dallo stato caotico delle masse e dell'energie che circondano la nostra piccola e meravigliosa Terra con il suo patrimonio di vita. Possiamo filtrare il grande mistero con le ragioni del cuore, ma anche con la consapevolezza che la mente ha il potere di costruire modelli interpretativi forti, capaci di fare chiarezza nell'instabile mondo delle emozioni. Questa legge, che lega masse, distanze e forze presenti in tutto l'universo, rappresenta un'affascinante armonia, uno dei tanti motivi che confortano la ragione umana.

C'è chi sostiene che le differenze nascono solo per mèro interesse economico o politico. Giorello usa questa terminologia per indicare che la frattura si è avuta soprattutto per ragioni di potere nella ripartizione dei fondi e dei contributi finanziari da dare ai diversi settori della ricerca, sicuramente durante il fascismo, ma anche prima con la costituzione del Regno d'Italia. Anche numerosi uomini di scienza hanno contribuito e agevolato questo risultato finale, forse involontariamente. Essi, stanchi di sottostare a interferenze di tipo moralistico o semplicemente a obblighi di orientamento nella ricerca per scelta politica, hanno optato coscientemente per una separazione salvifica tra scienza e filosofia. La scienza, al contrario della morale, non può essere vincolata e la libertà di ricerca dello scienziato va sempre salvaguardata. Invece, ogni volta che la scienza raggiunge un risultato utile, si scatenano disquisizioni etiche, giuridiche e logiche su quanto raggiunto, sulla giustizia e sull'eticità delle applicazioni che se ne possono avere, senza speranza di accordi.

Forse, però, l'aspetto più significativo – a parer mio – che può giustificare questa divisione tra le due culture attiene a un problema di padronanza del linguaggio necessario per capire ciò che si esercita e si realizza nella scienza. Giorello non ha fatto riferimento alla questione, ma si capisce dalla storia che accompagna i due percorsi culturali cui ci riferiamo che se si esprimono concetti e saperi classici, sia pur con sofisti-cati tecnicismi, il linguaggio naturale che gli uomini di cultura umanistica usano, è comprensibile a tutti; invece, il linguaggio scientifico oggi obbligatoriamente passa da un formalismo matematico, rigorosamente simbolico, e dal suo ermetismo che risulta più complesso da comprendere. Per questo, più di ogni altro atto o fatto, influisce l'effetto frattura. La specie degli *human of art* rappresenta allora un gruppo omogeneo solo se almeno la maggioranza dei presunti eletti ha in qualche modo una discreta conoscenza matematica e scientifica.

Consideriamo con attenzione quanto qui di seguito viene esposto per rendersi conto di quanto testé detto. Riportiamo la bella poesia di Catullo che, almeno una volta nella vita, tutti abbiamo imparato e con convinzione recitato contro l'opacità del vivere e il perbenismo dei sentimenti:

Odi et amo, Quare id faciam fortasse requiris.
Nescio, sed fieri sentio et excrucior. (Catullo)

Ognuno può vedere e sentire in questa poesia la profondità, la tecnica, la sintesi che manifesta. Nella sua armonia si annida la presenza di una misura (di una metrica, della matematica, infine).

Se, invece, scrivo

$\Delta X_t = a \cdot X_t - b \cdot X^2_t$,

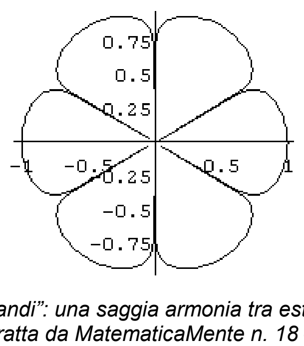
solo chi ha avuto una formazione matematica può capire di che cosa si tratta, ma la maggior parte delle persone colte non coglie il significato della scrittura (essa descrive infatti la crescita di una popolazione biologica in assenza di predatori ed è nota come l'equazione di Verhulst). Queste scritture (formule nella terminologia matematica) possono essere autentiche poesie, senza considerare spesso il forte contributo epistemologico che portano con sé. Volendo esprimere in linguaggio naturale quanto scritto nella relazione simbolica sopra riportata, essa verrebbe tradotta così:

La variazione di una popolazione biologica (ΔX_t) al variare del tempo (t) è uguale al tasso di crescita (a) per il numero di individui presenti nel territorio (X_t) al tempo t (e questo rappresenta i nuovi ingressi) diminuito degli individui che per varie ragioni (prevalentemente legate alla scarsità di risorse) se ne vanno dal territorio (o muoiono o emigrano) nell'arco di tempo unitario.

Pare evidente la differenza di espressione dei due modi di comunicare e risulta chiaro lo strapotere ermetico del linguaggio simbolico matematico e la sua chiarezza.

Occorre dire, per correttezza e per rispetto di una simmetria delle responsabilità, che molti docenti di matematica hanno una grave responsabilità quando insegnano matematica e la presentano solo come una struttura di calcolo. Come scrisse B. Russell, molti matematici si nascondono dietro le formule perché spesso non sanno controllarne profondamente i significati. Indipendentemente dai docenti, però, chi vuole la completezza nella sua preparazione umana (e quindi umanistica) deve prepararsi a capire anche ciò che si nasconde dentro l'ermetismo di una relazione formale simbolica e imparare. Solo così potrà avvenire quella unificazione che è tipica di chi coltiva l'arte del sapere e il piacere della speculazione a tutto campo, tipica degli uomini dotati di strumenti capaci di una completa visione del mondo e del pensiero umano.

Esiste, in fondo, un solo umanesimo, ma è sempre più difficile convincere chi ne ignora una delle due parti.



Le "rose di Grandi": una saggia armonia tra estetica e misura (matematica) (tratta da MatematicaMente n. 18 – giugno 1999).