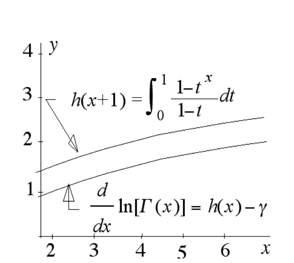
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 86 – dicembre 2004



$\Gamma(x)$, $n!$, $h(x)$, Hn, γ, $\psi(x)$, $\zeta(x)$, ...

(*Una ciliegia tira l'altra*)

di Arnaldo Vicentini

Prefazione

I simboli del titolo significano:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} \cdot dt; \quad n! = \prod_{k=1}^{n} k \;; \tag{1}$$

$$\Gamma(1) = 1 \wedge \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \Rightarrow \Gamma(n+1) = n!$$

$$h(x) = \int_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{1-t} \cdot dt \;\; ; \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \;; \tag{2}$$

$$h(1) = 0 \wedge h(x+1) = \frac{1}{x} + h(x) \Rightarrow h(n+1) = H_n;$$

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}[H_n - \ln(n)] = \lim_{x\to\infty}[h(x+1) - \ln(x)]\,; \tag{3}$$

$$\psi(x) = \frac{d}{dx}\ln[\Gamma(x)] = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\,; \tag{4}$$

$$(z \in C \wedge |z| > 1) \Rightarrow \zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}\,. \tag{5}$$

Durante la stesura dell'articolo "*La serie armonica e la costante* γ", (*MatematicaMente,* n. 84), notata l'analogia tra la funzione Γ e la funzione-integrale in (2), mi chiedevo se questa – chiamata da me $h(x)$ – avesse già un suo nome, come l'aveva appunto l'analoga Γ. La mia domanda aspetta ancora risposta: ma fu per questa curiosità che mi imbattei nella funzione $\psi(x)$. Il prof. Claudio Bernardi, (Università. "La Sapienza", Roma), mi segnalò che la funzione di cui cercavo il nome è la somma della costante γ e della derivata di $\ln[\Gamma(x)]$, che tale derivata è spesso indicata con $\psi(x)$ e che del tutto potevo avere conferma nel manuale *Abramowitz & Stegun*. Cercai allora questa voce in Internet. Sorpresa: là c'è l'intero manuale! [*V.* http://jove.prohosting.com/~skripty/]. Difficile scaricarlo: ogni pagina è una JPEG! Comunque, vien voglia di lasciarsi irretire dall'intreccio di legami che collegano i vari argomenti. A me, ingenuo e sprovveduto dilettante, succede a volte di arrovellarmi il cervello nel tentare di provarne qualcuno; e quando ci riesco la soddisfazione è grande. Gli argomenti evocati dai simboli nel titolo non sono che una parte di quelli toccati dal manuale nel capitolo sulla funzione Γ. In esso, a pag. 255 la funzione ψ è definita come Γ'/Γ; e a pag. 259 si legge:

$$\psi(z) + \gamma = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-zt}}{1-e^{-t}} \cdot dt = \int_0^1 \frac{1-t^{z-1}}{1-t} dt\,. \tag{6}$$

Il mio intendimento è quello di esporre lo studio della funzione integrale da me detta $h(x)$ e definita in (2): in particolare la prova dell'uguaglianza tra il 1° ed il 3° membro di (6). [L'uguaglianza tra il 2° ed il 3° membro si prova con semplice sostituzione della variabile di integrazione].

$\psi(x) = h(x) - \gamma$

Dalla definizione di $h(x)$ data in (2) si ricava subito:

$$h(x+1) = \int_0^1 \frac{(1-t)\,t^{x-1} + (1-t^{x-1})}{1-t} dt = \frac{1}{x} + h(x)\,. \tag{7}$$

Sia $\psi(x)$ la derivata di $\ln[\Gamma(x)]$. Siccome $\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x)$, si ha:

$$\psi(x+1) = \frac{d}{dx}\ln[x\Gamma(x)] = \frac{\Gamma(x) + x\Gamma'(x)}{x\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \psi(x)\,. \tag{8}$$

Dal confronto di (7) con (8) segue che $h(x) - \psi(x)$ è tutt'al più una funzione periodica di periodo 1. Non so per quale via altri ha dimostrato che tale differenza vale la costante γ definita in (3). Ne ho cercata una e trovata la seguente.
In [B.1] si prova che, per $|x| > 1$, $\Gamma(x+1)$ vale:

$$\Gamma(x+1) = [x^x e^{-x}(2\pi x)^{1/2}] \cdot e^{\varphi(x)}\,, \tag{9}$$

dove $\varphi(x)$ è la serie di potenze di $1/x$ così definita:

$$\forall k \in N \setminus \{0,1\} \sum_{r=1}^{k-1} \binom{k-1}{r-1} \alpha_r = \frac{k-1}{2k(k+1)}\,;$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{x^n}\,. \tag{10}$$

In [B.2] si prova che, per $|x|>1$, $h(x+1)$ vale:

$$h(x+1) = \ln(x) + \gamma + d(x) \tag{11}$$

dove $d(x)$ è la serie di potenze di $1/x$ così definita:

$$\forall k \in N \setminus \{0,1\} \sum_{r=1}^{k-1} \binom{k-1}{r-1} a_r = \frac{1}{k}\,; \quad d(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}\,. \tag{12}$$

Ora, la (9) ci dà;

$$\ln[\Gamma(x+1)] = x\ln(x) - x + [\ln(x) + \ln(2\pi)]/2 + \varphi(x), \tag{13}$$

e quindi, tramite la (10):

$$\psi(x+1) = \ln(x) + \frac{1}{2x} + \frac{d}{dx}\varphi(x)$$

$$= \ln(x) + \frac{1}{2x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n\alpha_n}{x^{n+1}}\,. \tag{14}$$

Siccome dalla 1ª di (12) viene $a_1 = 1/2$, la stessa diventa:

$$\forall k \in N \setminus \{0,1,2\} \sum_{r=2}^{k-1} \binom{k-1}{r-1} a_r = -\frac{1}{2} + \frac{1}{k} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in N \setminus \{0,1\} \sum_{r=1}^{k-1} \binom{k}{r} \cdot a_{r+1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{k+1}\,. \tag{15}$$

e quindi la (11) diventa:

$$h(x+1) - \gamma = \ln(x) + \frac{1}{2x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{x^{n+1}}\,. \tag{16}$$

Infine, la 1ª di (10) si può trasformare come segue:

$$\forall k \in N \setminus \{0,1\} \sum_{r=1}^{k-1} \binom{k-1}{r-1} (-k \cdot \alpha_r) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{k+1} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in N \setminus \{0,1\} \sum_{r=1}^{k-1} \binom{k}{r} (-r \cdot \alpha_r) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{k+1}\,. \tag{17}$$

Il confronto tra la (15) e la (17) ci dice che tra i coefficienti $\{a_n\}$ e $\{\alpha_n\}$ c'è la relazione $a_{n+1}=-n\alpha_n$: e ciò basta a provare che da (14) e (16) segue $h(x)-\gamma=\psi(x)$.
(*Continua sul prossimo Nr. 87*)

Bibliografia: [B.1] A. Vicentini, *"Simulazione accurata della funzione Γ"*, Atti del Congresso Nazionale della Mathesis 1997- Caserta, pagg. 401÷408. [B.2] A.Vicentini, *"La serie armonica e la costante γ"*, *MatematicaMente*, Nr. 84, ottobre 2004. [B.3]. Manuale di funzioni matematiche *Abramovitz & Stegun,*
URL http://jove.prohosting.com/~skripty/;
pag. 255,(URL http://jove.prohosting.com/~skripty/page_255.htm);
pag. 259 (URL http://jove.prohosting.com/~skripty/page_259.htm).

"STRAPPI" DI SPAZIO

di Paolo Di Sia (*)

Secondo la Relatività Generale non è possibile che la trama geometrica dello spazio si strappi; le relazioni metriche di tale teoria richiedono uno spazio *liscio*, senza cioè punte aguzze, pieghe spigolose, pezzi distinti *incastrati*, strappi. Alla scala di Planck buchi e strappi potrebbero invece rappresentare una caratteristica microscopica comune della struttura dello spazio. La teoria delle stringhe evidenzia infatti che esistono circostanze fisiche (che non hanno a che vedere con *buchi neri* o *wormholes*) nelle quali la trama dello spazio si può strappare.

Nel 1987 si scoprì che era possibile trasformare certi spazi di Calabi-Yau (spazi particolari in cui vengono *compattificate* le extra-dimensioni delle teorie di stringa) in altri praticando una puntura sulla loro superficie e poi ricucendo il foro secondo un ben preciso procedimento matematico. Il procedimento può essere così descritto: si rimpicciolisce una sfera dentro uno spazio di Calabi-Yau fino alle dimensioni di un punto, operando una sorta di strozzatura nello spazio; lo spazio si strappa e produce una sfera che gonfiandosi rende nuovamente liscia la propria superficie. La sfera originaria (iniziale) ha subito una procedura detta *flop*. In certi casi il nuovo spazio di Calabi-Yau prodotto da un *flop* è *topologicamente diverso* da quello di partenza; ciò significa che è impossibile ottenere uno spazio di Calabi-Yau finale deformando quello iniziale *senza produrre strappi* in qualche fase intermedia dell'operazione.

Ciò che si verifica sono pertanto transizioni con cambiamento di topologia attraverso un *flop*; nelle transizioni attraverso *flop* si producono dunque strappi nella trama dello spazio.

Una delle domande emerse da tale nuovo contesto riguardò le eventuali conseguenze (potenzialmente) catastrofiche dovute a tali strappi dello spazio. Gli sforzi compiuti in tal senso (in particolare tra i primi da E. Witten) sembrano provare che il *foglio di universo* descritto da una stringa fornisce uno scudo che cancella gli effetti potenzialmente catastrofici associati ad uno strappo della trama dello spazio. Una stringa può effettuare due diversi tipi di moto in prossimità di uno strappo, mentre una particella può muoversi in una sola maniera; la stringa può infatti spostarsi anche formando una circonferenza attorno allo strappo, circondandolo. È come se il foglio di universo della stringa costituisse una barriera protettiva in grado di neutralizzare esattamente le conseguenze della degenerazione geometrica dello spazio. In base alla formulazione di Feynman della meccanica quantistica, la stringa si muove "fiutando" tutte le possibili traiettorie; il moto osservato risulta dalla combinazione di tutti i possibili cammini. Tra tutte le possibili traiettorie di una stringa bisogna considerare anche quelle che si avvolgono attorno allo strappo. La meccanica quantistica tiene in considerazione gli effetti fisici derivanti da tutte le possibili traiettorie e tra queste ci sono infiniti cammini "*protettivi*" che circondano lo strappo. Witten ha provato che tali cammini danno contributi che neutralizzano la "catastrofe cosmica" dello strappo. Sono esempi di *transizioni con cambiamento di topologia* (*topology changing transitions*): sono le tra-sformazioni che producono gli strappi descritti sopra.

Come ulteriore conseguenza si sottolinea che la degenerazione geometrica non predice alcun effetto particolare dal punto di vista fisico. Si possono produrre strappi anche nelle tre dimensioni estese, non solo nelle extra-dimensioni della compattificazione di Calabi-Yau. Accade che si modificano i valori delle masse delle singole particelle, cioè le energie dei possibili modi di vibrazione, ma *in modo continuo*, senza discontinuità. Le misure sperimentali delle masse delle particelle elementari nei grandi centri di ricerca sperimentale dimostrano che tali masse sono significativamente stabili nel tempo. Nei primi istanti dopo il Big-Bang le masse delle particelle hanno subito invece variazioni nel tempo; è probabile perciò che durante tale periodo si siano verificati strappi, con conseguente cambiamento di topologia.

Se attualmente la trama dello spazio sta subendo uno strappo, ciò deve avvenire in maniera estremamente lenta, in modo che gli effetti sulle masse siano inferiori rispetto al potere risolutivo degli apparati sperimentali attuali.

(*) disia@sci.univr.it

STRANE SOMME DI FRAZIONI

di Giuliana Breoni

Rileggendo il testo di Morris Kline "Matematica la perdita della certezza" [B.1] mi ha nuovamente incuriosito la sua asserzione. «Le proprietà dei numeri interi non valgono in molte situazioni fisiche e per di più esistono anche casi pratici in cui occorre applicare una differente aritmetica delle frazioni». Seguono poi alcuni semplici esempi: un giocatore di baseball colpisce la palla con successo 2 volte su 3 battute in una partita e 3 volte con successo su 4 battute in una altra partita. Si vuol sapere la media dei rapporti fra il numero di battute valide e i turni di battuta; nella prima partita esso era 2/3 mentre nella seconda 3/4. Sappiamo che la media complessiva è 5/7. Valore che possiamo ottenere sommando separatamente i numeratori e i denominatori delle due frazioni! Cioè 2 / 3 + 3 / 4 = 5 / 7.

Consideriamo ora un altro esempio: supponiamo che si percorrano 100 *Km* in 2 ore e altri 200 *km* in 3 ore. La velocità media è di 60 *Km* orari. Velocità che si può ottenere dalle velocità medie delle singole tappe operando come prima:
[(100 / 2) + (200 / 3)] *km/h* = (300 / 5) *km/h* = 60 *km/h* !
In realtà «questa aritmetica da baseball» non introduce a mio avviso operazioni differenti da quelle solite perché la frazione

$\bar{v}=\dfrac{s_1+s_2}{t_1+t_2}$ corrisponde a $\bar{v}=\dfrac{v_1t_1+v_2t_2}{t_1+t_2}$,

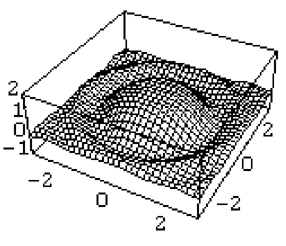
che è la media aritmetica delle velocità ponderate con i tempi di percorrenza e analogamente per il primo esempio

$$m=\frac{(2/3)\times 3+(3/4)\times 4}{3+4}=\frac{5}{7}.$$

La stessa risposta si può ottenere usando la media armonica delle velocità ponderate con gli spazi di percorrenza:

$$v_{-1}=\frac{s_1+s_2}{\dfrac{s_1}{v_1}+\dfrac{s_2}{v_2}}$$

Bibliografia: [B.1] Morris Kline, *Matematica la perdita della certezza*, Cap. IV, Mondatori, Milano, 1985



Modello di maremoto: $Z=Sen(x^2+y^2)\,/\,(x^2+y^2)$

La redazione augura un sereno 2005 a soci e sostenitori, malgrado i maremoti e gli accidenti della vita