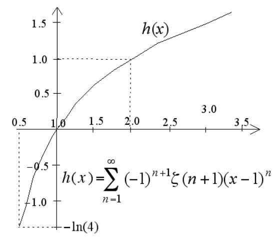
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 87 – gennaio 2005



$\Gamma(x)$, $n!$, $h(x)$, H_n, γ, $\psi(x)$, $\zeta(x)$, ...
(Una ciliegia tira l'altra)

di Arnaldo Vicentini

(*Prosegue dal Nr. 86)*

Ma che c'entra la "Zeta di Riemann" $\zeta(z)$?

Per x diverso da un intero positivo, l'integrale che definisce $h(x)$ nella (2) si può fare per serie sostituendovi $1/(1-t)$ con $1+t+t^2+t^3+\ldots$ (dato che t è compreso tra 0 ed 1). In tal modo si trova:

$$h(x+1)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 t^k(1-t^x)dt=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+x+1}\right]=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[1-\frac{1}{1+x/n}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+1}x^r}{n^{r+1}}=$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r+1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{r+1}}\right)x^r=\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r+1}\zeta(r+1)\,x^r\ .$$

$$h(x+1)=\zeta(2)\,x-\zeta(3)\,x^2+\zeta(4)\,x^3-\zeta(5)\,x^4+\ldots \qquad (18)$$

La serie (18) converge solo per $|x|<1$. Ma la limitazione è ovviata dalla proprietà $h(x+1)=1/x+h(x)$ con cui, per $|x|<1$:

$$h(x+1+n)=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{x+r}\ +\zeta(2)\,x-\zeta(3)\,x^2+\zeta(4)\,x^3-\ldots \qquad (19)$$

Interpretando la (18) come serie di Taylor, essa ci dice che la derivata k-esima di $h(x)$ in $x=1$ – dove $h(x)$ è nulla – vale $(-1)^{k-1}\zeta(k+1)\cdot k!$

In particolare, $h'(1)=\zeta(2)=\pi^2/6$.

E ... $h(n+1/2)$?

Si tenga sempre presente la peculiarità di $h(x)$:

$$h(x+1)=1/x+h(x) \qquad (20)$$

che consente di estendere $h(x)$ ad ogni x reale, tranne $x=-n$ (con n naturale) dove $h(x)$ non è definita. In particolare:

$$h(n+1/2)=2\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2r-1}\ +h(1/2)\ . \qquad (21)$$

Nella (21) si noti che:

$$2\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2r-1}\ =2h(2n+1)-h(n+1)\,. \qquad (22)$$

Pertanto:

$$\forall n\in \boldsymbol{N}\ \ h(n+1/2)+h(n+1)-2h(2n+1)=h(1/2)\,. \qquad (23)$$

Siccome è $h(1)=0$, posto:

$$f(x)=h(x+1)+h(x+1/2)-2h(2x+1)\,, \qquad (24)$$

per ogni n naturale dalla (22) risulta $f(n)=f(0)=h(1/2)$. È anche facile provare che $f(x+1/2)=f(x)$, ossia che $f(x)$ è periodica di periodo al massimo 1/2. Abbiamo infatti:

$$f(x+1/2)+h[(x+1/2)+1]+h[(x+1/2)+1/2]-2h[2(x+1/2)+1]=$$

$$=\frac{1}{x+1/2}+\ h(x+1/2)+h(x+1)-\ \frac{2}{2x+1}-2h(2x+1)\ =\ f(x).$$

Mostriamo che, in realtà, $f(x)$ – tranne $x=-n/2$, con n intero positivo, dove $f(x)$ non è definita – è costante e quindi vale ovunque $h(1/2)$.

Tramite la (11), la (24) diventa infatti:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x)+\gamma+d(x)+\\ &\quad +\ln(x-1/2)+\gamma+d(x-1/2)+\\ &\quad -2[\ln(2x)+\gamma+d(2x)]=\\ &= d(x)+d(x-1/2)-2d(2x)+\ln[1-1/(2x)]-2\ln(2)\,. \end{aligned}$$

Per x tendente all'infinito, siccome $d(x)$ è infinitesima – e infinitesimo è anche $\ln[1-1/(2x)]$ –, $f(x)$ tende a $-2\ln(2)$. Ma allora $f(x)$, essendo periodica, non può che essere costante. E siccome $f(0)=h(1/2)$, troviamo anche

$$h(1/2)=-2\ln(2)=-\ln(4). \qquad (25)$$

Questo risultato è controllabile con la definizione di $h(x)$ data in (2) dalla quale, per $x=1/2$, si ha subito:

$$h\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^1\frac{1-t^{-1/2}}{1-t}dt=2\int_0^1\frac{1-p^{-1}}{1-p^2}\,pdp=$$

$$=-2\int_0^1\frac{1}{1+p}dp=-2\ln(2)=-\ln(4)\,.$$

Infine, il fatto che $f(x)$ sia costante comporta:

$$d(x)+d(x-1/2)-2d(2x)=-\ln[1-1/(2x)]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{(2x)^n}\,,$$

il che basterebbe a sviluppare $d(x)$ in serie di potenze di $1/x$.

[B.1] A. Vicentini, *"Simulazione accurata della funzione Γ"*, Atti del Congresso Nazionale della Mathesis 1997- Caserta, pagg. 401÷408.
[B.2] A.Vicentini, *"La serie armonica e la costante γ"*, *MatematicaMente*, Nr. 84, ottobre 2004.
[B.3]. Manuale di funzioni matematiche *Abramovitz & Stegun,*
URL http://jove.prohosting.com/~skripty/;
pag. 255,(URL http://jove.prohosting.com/~skripty/page_255.htm);
pag. 259 (URL http://jove.prohosting.com/~skripty/page_259.htm).

Punti di vista sulla conoscenza

di Luciano Corso

[*Segue dal n. 84*]

David Hume (Edimburgo, 1711 – 1776), nel suo *Trattato sulla natura umana* sosteneva che non conosciamo né la mente, né la materia. Esse sono solo finzioni. L'uomo, secondo Hume, non può raggiungere alcuna verità.

Una interessante interpretazione del concetto di conoscenza si ha negli scritti di Giambattista Vico (Napoli, 1668 - 1744). L'idea di Vico sulla conoscenza è categorica: *la conoscenza è vero fatto*; cioè essa deve risultare dimostrazione di quanto si può sperimentare. È *il fatto* il punto centrale del conoscere. Una interpretazione estensiva di tale idea di conoscenza si manifesta anche in quella scuola filosofica, successiva a Vico, che ritiene che sia centrale nel processo di identificazione della conoscenza l'evidente conseguimento di un successo: *si conosce solo là dove si può avere successo* (in senso lato). Con questa idea, la questione diventa sotto certi aspetti operativa. Infatti può pensare di conoscere solo chi riesce a modificare la realtà, avendo la padronanza delle regole che la governano. Tale idea induce un modernismo pericoloso, ma attuale. Il concetto di successo è di portata maggiore del concetto di fatto. Il successo corrisponde alla realizzazione di un progetto.

Immanuel Kant (Königsberg - Prussia - 1724 - 1804) ebbe formazione matematica e fisica. Fu mediatore tra le istanze razionalistiche della matematica pura e le istanze sperimentali della fisica osservativa. Nella *Critica della Ragion Pura* (1781) raccolse la sfida di Hume rispondendo che l'intelletto possiede le forme dello Spazio e del Tempo, prima ancora di conoscere sperimentalmente. Esse sono forme della percezione e attraverso loro l'intelletto raccoglie le esperienze. La filosofia kantiana esalta il ruolo della ragione a cui spetta il compito di investigare non tanto la natura, ma la struttura del ragionare e della mente. Per Kant, la conoscenza della matematica, la verità che contiene, non è frutto di un'indagine sperimentale, bensì di una pura speculazione intellettuale:" Noi, delle cose, non conosciamo, a priori, se non quello che noi stessi vi mettiamo". Ma c'è un limite alla conoscenza. Infatti Kant, nel tentativo di costruire coerentemente una conoscenza, riconosce che è necessario usare alcune categorie logiche, di tipo metafisico quali "Eterno", "Infinito", "Anima", "Dio" per giustificare e sostenere l'argomentazione. Ogni teoria cognitiva risulta, perciò, debole sul piano della completezza (intesa sotto l'aspetto logico), nel senso che senza questi termini, non è possibile chiudere il cerchio ed esaurire lo stato di conoscenza dell'uomo senza contraddizioni (questa appare una anticipazione intuitiva del teorema di incompletezza di K. Gödel) [B.11].

Georg Wilhelm Friedrich Hegel (Stoccarda, 1770 - 1831) tenta di risolvere il problema della conoscenza, intesa come evidenza, mediante un'idea di conoscenza di tipo collettivo: si conosce là dove vi è una *serie di credenze comuni fra di loro coerenti*. È ovvio che la tesi si presta a molte critiche. In base a essa una serie di miti o di saghe comuni e coerenti potrebbero già dare una conoscenza del mondo e della natura delle relazioni umane.

Carl Friedrich Gauss (Brunswick, 1777 - 1855), geniale matematico, con la semplice ed elegantissima equazione

$$f\left(x\middle|\mu,\sigma\right)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}\qquad\left\{x\middle|x\in R\right\},$$

compendia e anticipa 200 anni di storia epistemologica e ontologica della scienza. È straordinario come i matematici riescano a descrivere, con una sintesi impressionante, idee il cui sviluppo può riempire interi volumi di filosofia.

Gauss, senza averne probabilmente coscienza, con questa funzione di densità di probabilità presenta quattro aspetti fondamentali della conoscenza umana. Data l'importanza di questa relazione – che nessuno (dico nessuno!) dovrebbe ignorare – presenterò questi quattro aspetti lasciando ai lettori il compito di fare le considerazioni inevitabili per valutarne la sua reale portata epistemologica e ontologica.

1) il primo aspetto di rilievo di questa legge è proprio quello riferibile direttamente alla interpretazione che ne dette Gauss. Essa rappresenta come si distribuiscono le misure sperimentali di realtà fisiche (ordinariamente viene detta curva degli errori). Tale affermazione sostiene, implicitamente, il seguente principio: conoscere ha un senso in quanto c'è una realtà da conoscere; il metodo per conoscere è quello di misurare (in senso lato) e di confrontare le misure per verificare se può esistere un loro orientamento indicativo (oggi diremmo statistico) verso un qualcosa che c'è.

2) Il secondo aspetto che coglie questa legge, e che forse Gauss stesso non seppe valutare nella sua pienezza, è che essa presenta la dinamicità stessa della natura al variare del tempo. I sistemi di natura non sono statici e al mutare del tempo cambiano regolarità e stati. Così un oggetto fisico che ora presenta una lunghezza, o un peso o una costante di un certo valore (la misura di quell'oggetto è definita), domani potrà subire una deformazione a livello atomico che lo porterà ad avere una diversa misura. Non si tratta solo, cioè, di misure diverse perché i misuratori sono diversi, ma di misure diverse perché la natura è dinamica e modifica di fatto la struttura degli oggetti e degli enti che sono sperimentabili (aspetto epistemologico) [B.12].

3) Il terzo elemento innovativo della "*gaussiana*" (come spesso viene detta oggi la curva) è che essa rappresenta un comportamento vero di natura (aspetto ontologico). Il comportamento di numerose variabili di natura, quando si misura, è proprio quello di evidenziare una distribuzione di queste misure di tipo campanulare simmetrico. Ciò è di una importanza scientifica estrema: significa, infatti, che gli oggetti fisici sono diversi in natura non solo perché sbagliamo a misurare, non solo perché c'è una dinamicità della natura che modifica le misure degli enti fisici, ma soprattutto perché la natura forma gli oggetti fisici, affini per genere e specie, con misure diverse. È quindi nella natura stessa la irregolarità dei fenomeni. Un esempio può cogliere questo concetto: l'*homo Sapiens sapiens* ha una statura per individuo adulto che può oscillare da 130 a 230 cm. Ciascun individuo, con diversa statura, è normale anche se le differenze di statura possono essere molto diverse. Allora si può dire che non esiste una misura oggettiva per l'uomo e che queste diversità riscontrate non sono il risultato di errori di misurazione, né di dinamicità nel tempo delle altezze degli uomini, ma solo di puri comportamenti naturali regolari.

4) il quarto elemento fondamentale che caratterizza la curva di Gauss è che essa descrive una qualità epistemologica di grande rilievo. È, infatti, il fondamento della teoria dei grandi campioni, di importanza determinante per la matematica applicata e la statistica. In sostanza, un esperimento costituito da tante prove ($n \to \infty$) genera campioni i cui momenti campionari si distribuiscono con una legge di probabilità che converge alla normale (altro nome dato alla gaussiana), indipendentemente dalla legge di probabilità della variabile aleatoria di origine. L'importanza pratica di questo teorema, è che nei grandi campioni le verifiche d'ipotesi riguardanti i momenti di una popolazione, sulla base dei momenti campionari si effettuano lavorando con la normale. (*Segue al numero 90*).

Bibliografia: [B.11] Piergiorgio Odifreddi, *Il computer di Dio*, R. Cortina Editore, Milano, 2000; [B.12] Luciano Corso, *L'incerto e il caso*, MatematicaMente nn. 69 – 70 luglio-agosto 2003.

Dal portale *Liberliber*

di Carlo Sintini

Sul portale *Liberliber* che si occupa della pubblicazione gratuita in rete di opere letterarie libere da vincoli di copyright) si trova, tra l'altro, un'opera di fisica del 1860 (circa) che mi sono preso la briga dopo averla passata tutta allo scanner (immagini comprese), di trasformare in formato WORD e collocare nel sito. Sono quattro volumi.

L'opera è molto interessante: ecco per esempio cosa affermava l'autore a proposito di Galilei (sono passati poco meno di 150 anni da allora !).

«Convien riconoscere che chi à contribuito più d'ogni altro alla pronta propagazione del sistema copernicano, ed al perfezionamento del-le sue prove, è stato Galileo Galilei: sebbene si debba d'altra parte confessare, che questi colle sue imprudenze nocque assai, disturbando le coscienze prevenute universalmente in contrario, ed involontariamente contribuendo in un momento il più critico all'intronizzazione *dello spirito privato, e della libera discussione*, ed al disprezzo di ogni autorità sugli intelletti. Dico questo per premunire i miei scolari, affinché non cadano nella comune leggerezza, per non dire malignità, colla quale ogni qual volta ritorna il discorso sul sistema copernicano, tutti quelli che ànno una semplice infarinatura in fatto di scienze naturali e di storia (**e persino le donne**) credono di farsi belli, e di passare per istruiti esclamando, dopo un affannato sospiro di compassione, "povero Galileo"; oppure ripetendo con riso ironico e cipiglio beffardo il notissimo "e pur la zira". Senza punto vedere che con ciò fanno mostra della più grossolana ignoranza su questo fatto storico; accettando come oro di coppella le più insussistenti calunnie, inventate contro Roma, e la Santa Sede. »

L'opera completa la puoi scaricare (gratuitamente) dal sito http://www.liberliber.it/biblioteca/r/regnani/index.htm .