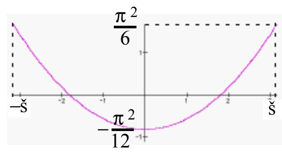
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 88 – febbraio 2005



Eventi e parole che li descrivono

di Luciano Corso

Dato uno spazio di probabilità $\{\Omega, F, P\}$, si consideri un certo evento $\omega_k \in \Omega$. Tale evento deve potersi descrivere mediante un alfabeto. Si prende, per tale scopo, l'alfabeto più semplice: quello binario costituito da due caratteri (usualmente { 0 ,1 }).

Sappiamo che l'insieme dei numeri reali è costituito da elementi che possono essere posti in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei reali compresi nell'intervallo aperto (0,1). Ogni numero reale $\omega_k \in (0,1)$ può essere rappresentato dalla seguente estensione infinita di cifre binarie (caratteri dell'alfabeto):

$$0,d_1(\omega_k)d_2(\omega_k)d_3(\omega_k)\ldots \qquad (1)$$

dove

$$d_j = \begin{cases} 1 & se \quad A \quad con \quad P(A) = p \\ 0 & se \quad \neg A \quad con \quad P(\neg A) = 1 - p \end{cases}, \quad \forall j \in N. \qquad (2)$$

A è un qualsiasi evento di un sistema dicotomico di eventi equiprobabili in ogni prova (per esempio "Testa" in un lancio di moneta), e $\neg A$ il suo complementare. La condizione di equiprobabilità pone p = ½. Adottando questo metodo di rappresentazione di un evento, si possono esprimere tutti gli eventi di Ω come parole il cui significato è anche di tipo numerico.
Per esempio, se consideriamo un esperimento costituito di n = 5 lanci di moneta ideale, si possono ottenere 2^5=32 eventi distinti di Ω (*necessari* perché almeno uno di questi eventi, nell'esperimento considerato, si deve verificare e *incompatibili* perché essi sono a due a due disgiunti). Usando la scrittura proposta, li presentiamo qui di seguito:

Ω

0,00000	0,00001	0,00011	0,00111	0,01111	0,11111
	0,00010	0,00101	0,01011	0,10111	
	0,00100	0,00110	0,01101	0,11011	
	0,01000	0,01001	0,01110	0,11101	
	0,10000	0,01010	0,10011	0,11110	
		0,01100	0,10101		
		0,10001	0,10110		
		0,10010	0,11001		
		0,10100	0,11010		
		0,11000	0,11100		

Queste parole hanno una estensione di "cifre" finita in quanto n=5, ma se dovessimo astrattamente proseguire con la serie di n lanci senza fine avremmo una sequenza infinita di cifre binarie del tipo (1) che caratterizza un numero reale.

Una estensione di cifre binarie lunga n produce sempre un numero di parole distinte pari a 2^n. Queste esauriscono tutti gli eventi di uno specificato spazio campionario Ω.
Ora, a priori, la probabilità che si verifichi una parola (e quindi l'evento descritto da essa) lunga n di questo tipo è:

$$P\left(\omega_k = 0, d_1(\omega_k)\, d_2(\omega_k)\, d_3(\omega_k) \ldots d_n(\omega_k)\right) = 2^{-n} \qquad (3)$$

per ogni $\omega_k \in \Omega$. Se, poi, la sequenza è illimitata, si ottiene:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\omega_k = 0, d_1(\omega_k)\, d_2(\omega_k)\, d_3(\omega_k) \ldots d_n(\omega_k)\right) = 0 \qquad (4)$$

Sia la (3), sia la (4) affermano che ogni parola, e quindi ogni evento descritto da queste parole, ha uguale probabilità di verificarsi.
Ora, di fronte a una parola con estensione di cifre finita, lunga n, a posteriori noi abbiamo una diversa considerazione circa la sua casualità a seconda della regolarità più o meno spinta della sequenza di cifre che la esprimono. Ciò significa che l'idea di caso che associamo agli eventi possibili di uno spazio Ω risulta molto più sofisticata di quanto comunemente inteso.
Per far capire quanto appena detto, facciamo il seguente esempio: supponiamo che il nostro evento sia espresso dalla seguente parola binaria:

0,101010101010101010101010101010101010101010101010

costituita da 24 coppie sequenzialmente identiche di 1 e 0 e precedute da uno "0," puramente formale, in questo caso. Quando ci si trova di fronte a una sequenza del genere, francamente si fa fatica a credere che essa sia la descrizione di un evento casuale. Appare, infatti, troppo regolare l'alternanza di cifre che descrivono il "numero". Per tale ragione, a posteriori, siamo tutti orientati a pensare che ci sia lo zampino di una mente ordinatrice. Se, invece, ci trovassimo davanti alla sequenza di cifre seguente:

01001100001011001111001000011100000000010001000001

avremmo una certa difficoltà a credere che la sequenza sia stata prodotta da una regola sulla collocazione delle cifre nella parola.

Si può trovare un criterio che consenta di stabilire quando si è in presenza di un evento assolutamente casuale, cioè quando una parola sia l'espressione simbolica di un evento assolutamente casuale? Chi avrà la voglia di leggerci, troverà la risposta in uno dei prossimi articoli.

Rette euclidee e geodetiche

Luigi Landra

"La geometria euclidea, fin dall'antichità, non era vista soltanto come una teoria matematica, ma anche come uno strumento assai valido per la descrizione di fatti sperimentali: si pensava che lo spazio fisico avesse una sua struttura assoluta e che la geometria euclidea la descrivesse appunto adeguatamente", come viene affermato in [B.1] a pag. 307.

Il passaggio da una geometria come branca della matematica, e perciò ideale, a quella intesa come descrizione della realtà fisica che possiamo chiamare geometria fisica, consiste nel fatto che i concetti primitivi della teoria geometrica vengono interpretati su oggetti fisici e che, grazie a tale interpretazione, le proposizioni della teoria geometrica sembrano in grado di descrivere con fedeltà il comportamento di tali oggetti nello spazio fisico.

Il concetto di linea retta per due punti di un piano, intesa come linea di cui ogni segmento è il percorso a lunghezza minima tra tutti i percorsi che ne congiungono gli estremi, può essere esteso a superfici curve, in particolari sferiche. Dati su una superficie sferica due punti A e B abbastanza vicini, vi sarà, tra tutti gli archi delle linee della superficie che uniscono i due punti, almeno un arco che determina il percorso minimo che si deve compiere su quella superficie per spostarsi dal punto A al punto B. Tali archi di minima distanza sono detti *archi geodetici* della superficie e lungo essi si misurano le distanze. Si dicono *geodetiche* le linee delle superfici che contengono gli archi geodetici.

È interessante ora valutare che differenza si riscontra tra la lunghezza di un arco di circonferenza massima d'una sfera – arco di linea geodetica sulla superficie sferica – e la lunghezza della sua corda nel caso di considerare la Terra sferica e confondere, come è consuetudine, tratti di linee geodetiche con segmenti rettilinei. A tale riguardo possiamo eseguire i calcoli considerando una sfera che ha il raggio corrispondente a quello della Terra all'equatore, cioè 6378,388 km.

Possiamo fare il confronto prima con la geodetica che corrisponde a un grado centigrado e il relativo segmento che si stacca sul piano euclideo passante per gli estremi della geodetica. Esso è la base di un triangolo isoscele avente per lati il raggio della Terra all'equatore. Poi possiamo passare alla geodetica di 1km da confrontare con la corrispondente base del triangolo isoscele avente sempre i lati corrispondenti alla misura del raggio equatoriale. La circonferenza massima della sfera avente per raggio quello della Terra all'equatore è circa 40.076,59376 km. La geodetica corrispondente a un grado è 40.076,59376 km : 360° $\cong$ 111,3238716 km.

La base d'un triangolo isoscele di raggio R uguale a quello della Terra e angolo al vertice α di un grado (cioè $\pi/180$ rad) è lunga

$2R sin(\alpha/2)=[40.076,59376/\pi] sin(\pi/180) \approx 111,3224586\ km.$

L'arco di circonferenza di cui è la corda è lungo $\alpha R= \pi R/180$.

La differenza tra le due lunghezze è dunque $R[\alpha - 2 sin(\alpha/2)] \approx$ $40076,59376[1/360 - sin(\pi/360/\pi)] km \approx 1,41297 m$.

Se poi consideriamo un arco a di geodetica che abbia una corda c di 1km, lo scarto tra le rispettive lunghezze è davvero irrisorio. Posto $s=(c/2)/R$, per c=1km si ha

$s \approx \pi/40.076,59376$, e quindi: $a - c = c[arcsin(s) - s]/s \approx$

$\approx cs^2/6 \approx 1000[\pi/40.076,59376]2/6 m \approx 1,028\ \mu m$.

La differenza tra le distanze euclidee e le lunghezze di archi di geodetica sono dunque irrilevanti nella pratica quotidiana. Per esempio, nelle costruzioni di pavimenti, il controllo della orizzontalità è fatto con livella su pertiche rettilinee lunghe al massimo pochi metri.

Bibliografia: [B.1] E. AGAZZI – D. PALLADINO, Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria, Edizioni scientifiche e tecniche Mondatori, Milano, 1978

Teoria dei Giochi: una breve nota

di Gianfranco Gambarelli [1]

La Teoria dei Giochi è la scienza matematica che analizza situazioni di conflitto e ne ricerca soluzioni competitive e cooperative. Le applicazioni e interazioni di tale teoria sono molteplici: dal campo economico a quello militare, biologico, sociologico, psicologico, finanziario, politico, ambientale, sportivo. Per un'introduzione digeribile anche da non matematici segnalo il mio volumetto *Giochi competitivi e cooperativi* (II ed. Giappichelli, Torino, 2003, con contributi storici a cura di Guillermo Owen). La Teoria nasce nel 1928 con un articolo di Von Neumann e trova i primi importanti impieghi nella seconda guerra mondiale. Il matematico è, infatti, padre del mitico MANIAC (coperto dal segreto militare) precursore del Mark1. I primi utilizzi dell'Informatica consistono nell'applicazione della Teoria dei Giochi all'elaborazione delle quote di sgancio per i bombardieri, dei percorsi dei convogli che minimizzano la probabilità di intercettazioni nemiche e così via. Un nuovo passo fondamentale è favorito dall'incontro a Princeton fra Von Neumann e l'economista Oskar Morgenstern; da quell'interazione nasce nel 1944 il testo *Theory of Games and Economic Behavior* destinato a rivoluzionare i rapporti fra Matematica ed Economia.

Giocatori e mosse, strategie e pagamenti

Ogni "giocatore" è un soggetto razionale che può scegliere fra varie "mosse". Ad esempio, se il giocatore è un commerciante, le sue mosse possono essere aumentare o diminuire o lasciare invariati i prezzi dei suoi articoli; le mosse di un acquirente possono essere cambiare o restare fedele a un prodotto o a un fornitore; le mosse di un responsabile di logistica militare possono essere inviare un convoglio lungo un certo percorso, piuttosto che lungo un altro. Ogni "strategia" consiste nell'adozione di una mossa o di una combinazione di mosse. Ad esempio i convogli possono essere inviati periodicamente, per il 30% dei viaggi su un percorso e per il 70% su un altro; i prezzi dei prodotti possono essere variati in rotazione e così via. In dipendenza dalle strategie adottate da tutti i giocatori, ognuno riceve un "pagamento" che può essere positivo, negativo o nullo. Un gioco si dice "a somma costante" se per ogni vincita di un giocatore v'è una corrispondente perdita per altri. In particolare, un gioco "a somma zero" fra due giocatori rappresenta la situazione in cui il pagamento viene corrisposto da un giocatore all'altro.

I risultati di Nash

I principali risultati di von Neumann riguardano i giochi a somma costante fra due giocatori. Il problema dei giochi a somma non costante viene affrontato alla fine degli anni '40 da John Nash (premio Nobel 1994 per l'Economia), che introduce e sviluppa il concetto di "equilibrio di Nash". Un insieme di strategie adottate da tutti i giocatori costituisce un equilibrio di Nash se a nessuno conviene cambiare la sua, nel caso in cui tutti gli altri mantengano fissa la loro scelta. Consideriamo ad esempio un gioco composto da vari giocatori, ciascuno dotato di un numero finito di strategie ordinate secondo un certo criterio. Supponiamo che la regola dei pagamenti assegni vincite positive a tutti i giocatori, nel caso in cui tutti insieme scelgano la loro prima strategia; ancora vincite positive a tutti, nel caso in cui tutti insieme scelgano l'ultima strategia di ciascuno; vincite nulle a tutti, altrimenti. È facile verificare che l'insieme delle scelte per cui ognuno gioca la sua prima strategia costituisce un equilibrio di Nash; analogamente l'insieme delle scelte per cui ognuno gioca la sua ultima strategia. Ovviamente non tutti i giochi sono così semplici. Nel 1953 Nash affronta il problema delle strategie di cooperazione fra giocatori e della ripartizione della vincita ottenuta. La "soluzione cooperativa di Nash" per giochi a due persone costituisce un importante contributo alla risoluzione di conflitti.

I successivi sviluppi

Gli equilibri di Nash vengono in seguito approfonditi da Reinhald Selten con l'introduzione dei relativi "raffinamenti", che porteranno il Nobel anche a quest'ultimo. La soluzione cooperativa di Nash viene generalizzata da John Harsanyi per casi di più di due giocatori, in alternativa a un altro importante concetto di soluzione cooperativa, il "valore per giochi a n persone", introdotto da Shapley nel 1953. All'inizio degli anni '60 Robert Aumann e Michael Maschler dànno il via ai "giochi a informazione incompleta", i cui sviluppi porteranno il Nobel anche ad Harsanyi. Harold Kuhn (coautore con Tucker del famoso teorema di ottimizzazione) dà uno sviluppo fondamentale ai Giochi in forma estesa e ai collegamenti fra Teoria dei Giochi e Programmazione matematica. La società da lui diretta, *Mathematica*, consentirà ai due futuri "Nobel" Selten e Harsanyi di applicare la Teoria dei Giochi al problema del disarmo. Nel 1965 il testo "*Game Theory*" di Guillermo Owen (giunto recentemente alla terza edizione) costituisce la "fase Gutemberg" della teoria, in quanto la diffonde in tutto il mondo grazie alle traduzioni in russo, giapponese, tedesco, polacco, rumeno. Owen lavora anche con Shapley per applicazioni politiche dei Giochi e generalizza il valore di Shapley, nonché altri valori successivamente introdotti, al caso di Giochi con diverse probabilità di formazione delle coalizioni. Su questo punto pare che Nash abbia ancora qualcosa da dire.

[1] Docente di Matematica generale, Università degli Studi di Bergamo, esperto in Teoria dei Giochi