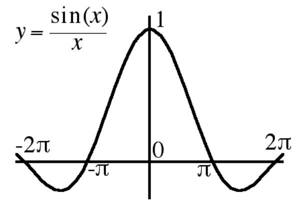
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 89 – marzo 2005



Divagazioni sul tema *sin*(*x*) / *x*

di Arnaldo Vicentini

1. Incominciamo col reciproco

Sia x un reale maggiore di 1. In **Appendice** mostreremo che:

$$I(x)=\int_0^\infty \frac{1}{1+t^x}\,dt=\frac{\pi/x}{\sin(\pi/x)}. \tag{1.1}$$

Per esempio, svolgendo l'integrale (1.1) per x=4 abbiamo:

$$I(4)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}+\operatorname{atan}(\sqrt{2}t+1)+\operatorname{atan}(\sqrt{2}t-1)\right]_0^\infty=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi=\frac{\pi/4}{\sqrt{2}/2}=\frac{\pi/4}{\sin(\pi/4)}.$$

Osserviamo ora che $I(x)$ si può decomporre come segue:

$$I(x)=\int_0^\infty \frac{1}{1+t^x}dt=\int_0^1 \frac{1}{1+t^x}dt+\int_1^\infty \frac{1}{1+t^x}dt.$$

Posto nell'ultimo integrale $t=1/u$, onde $dt=(1/u^2)du$, si ha:

$$I(x)=\frac{\pi/x}{\sin(\pi/x)}=\int_0^1 \frac{1}{1+t^x}dt-\int_1^0 \frac{1/u^2}{1+(1/u)^x}\,du\ .$$

$$I(x)=\int_0^1 \frac{1}{1+t^x}dt+\int_0^1 \frac{u^{x-2}}{1+u^x}du=\int_0^1 \frac{1+t^{x-2}}{1+t^x}\,dt\ . \tag{1.2}$$

Per esempio:

$$I(3)=\int_0^\infty \frac{1}{1+t^3}\cdot dt=\int_0^1 \frac{1+t}{1+t^3}\cdot dt=\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\cdot dt=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{atan}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]_0^1=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{\pi/3}{\sqrt{3}/2}=\frac{\pi/3}{\sin(\pi/3)}.$$

Nella forma dell'ultimo membro di 1.2 l'integrale $I(x)$ si può fare per serie. Essendo infatti $0\le t\le 1$ ed $x>1$, e quindi $|t^x|\le 1$, si può sostituire $1/(1+t^x)$ con $1-t^x+t^{2x}-t^{3x}+\ldots$ ottenendo:

$$I(x)=\int_0^1 \frac{1+t^{x-2}}{1+t^x}\cdot dt=\sum_{k=0}^\infty (-1)^k\int_0^1 (t^{kx}+t^{(k+1)x-2})\cdot dt=$$

$$=\sum_{k=0}^\infty\left[\frac{(-1)^k}{kx+1}+\frac{(-1)^k}{(k+1)x-1}\right]$$

$$=1+\sum_{k=1}^\infty (-1)^k\left(\frac{1}{1-kx}+\frac{1}{1+kx}\right). \tag{1.3}$$

Per esempio, per $x=4$ si trova:

$$I(4)=1-\frac{1}{1-4}-\frac{1}{1+4}+\frac{1}{1-8}+\frac{1}{1+8}-\frac{1}{1-12}-\frac{1}{1+12}+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\ldots=\frac{\pi/4}{\sin(\pi/4)}=\sqrt{2}\,\frac{\pi}{4}.$$

Si notino somiglianza e differenze con la serie:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\ldots=\operatorname{atan}(1)=\frac{\pi}{4}$$

Appendice - *Prova della tesi* (1.1)

a) Siccome $I(x)$ è continua per $x>1$, è sufficiente mostrare che la (1.1) vale se x è razionale e maggiore di 1. Sia dunque $x=q/p$, con p e q interi, $1\le p<q$ e p/q irriducibile.

b) Siano $P(z)$ e $Q(z)$ polinomi in z, il grado di $P(z)$ sia minore del grado q di $Q(z)$ e i q zeri z_r di $Q(z)$, (con $r=1, 2, \ldots, q$), siano tutti distinti. Detta $Q'(z)$ la derivata di $Q(z)$, vale l'identità:

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{r=1}^q \frac{P(z_r)}{Q'(z_r)}\frac{1}{z-z_r}\ , \tag{A1}$$

che consente di trovare facilmente una primitiva di $P(z)/Q(z)$ in termini di logaritmi di argomento complesso.

c) L'integrale di $dt/(1+t^{q/p})$, sostituendovi t con z^p, risulta:

$$A(x;\ q/p)=\int_0^x \frac{1}{1+t^{q/p}}\cdot dt=\int_0^{x^{1/p}} \frac{p\,z^{p-1}}{1+z^q}\cdot dz\ . \tag{A2}$$

I q zeri di $1+z^q$ sono $z_r=e^{i(2r-1)\pi/q}$. Dalla (A2), detta $F(z;\ q/p)$ una primitiva di $f(z;\ p/q)=pz^{p-1}/(1+z^q)$, applicando a questa la (A1) e mettendo in conto che $z_r^{\,q}=-1$ per ogni r, si ricava:

$$f(x;\ q/p)=\sum_{r=1}^q \frac{p\,z_r^{\ p-1}}{q\,z_r^{\ q-1}}\frac{1}{z-z_r}=-\frac{p}{q}\sum_{r=1}^q \frac{z_r^{\ p}}{z-z_r}\ ; \tag{A3}$$

$$F(z;\ q/p)=-\frac{p}{q}\sum_{r=1}^q z_r^{\ p}\ln(z-z_r)\ ; \tag{A4}$$

$$A(x;\ q/p)=\ F(x^{1/p};\ q/p)-F(0;\ q/p)\ . \tag{A5}$$

d) Si tenga ora presente che, essendo p/q irriducibile, risulta:

$$\sum_{r=1}^q z_r=e^{i\pi/q}\ \frac{e^{2i\pi}-1}{e^{2i\pi/q}-1}=\sum_{r=1}^q z_r^{\ p}\ =\ .$$

$$=e^{ip\pi/q}\ \frac{e^{2ip\pi}-1}{e^{2ip\pi/q}-1}=0 \tag{A6}$$

Pertanto:

$$\lim_{z\leftrightarrow\infty} F(z;\ \frac{q}{p})=0\ ;\ I\left(\frac{q}{p}\right)=-F\left(0;\ \frac{q}{p}\right)=\frac{p}{q}\sum_{r=1}^q z_r^{\ p}\ \ln(-z_r)\ .$$

Quindi, mettendo in conto che il modulo di ogni z_r vale 1, che la fase di $-z_r$ vale $[(2r-1)-q]\pi/q$ e non ignorando le (A6), si ha:

$$I(q/p)=-\frac{p\pi}{q^2}\sum_{r=1}^q (2r-1)\sin\left[\frac{p(2r-1)\pi}{q}\right]. \tag{A7}$$

e) Infine, posto $u=e^{ip\pi/q}$, onde $u^{2q}=1/u^{2q}=1$, dall'identità:

$$\sum_{r=1}^q (2r-1)k^{2r-1}=\frac{(2q-1)k^{2q+3}-(2q+1)k^{2q+1}+k^3+k}{(k^2-1)^2}$$

segue:

$$\sum_{r=1}^q (2r-1)u^{2r-1}=\frac{(2q-1)u^3-(2q+1)u+u^3+u}{(u^2-1)^2}=\frac{2qu}{u^2-1}\ ;$$

$$\sum_{r=1}^q \frac{2r-1}{u^{2r-1}}=\frac{2q/u}{1/u^2-1}=\frac{2qu}{1-u^2}\ .$$

Con ciò, la (A7) porge:

$$I(q/p)=\frac{\mathrm{i}p\pi}{2q^2}\left[\sum_{r=1}^{q}(2r-1)u^{2r-1}\ -\sum_{r=1}^{q}\frac{2r-1}{u^{2r-1}}\right]=$$

$$=\frac{\mathrm{i}p\pi}{2q^2}\left(\frac{2qu}{u^2-1}-\frac{2qu}{1-u^2}\right)=\frac{p\pi/q}{\sin(p\pi/q)}.$$

Casualità come disordine, esprimibilità, comprimibilità

di Luciano Corso

[*Segue dal n. 88*]

In base all'assioma del disordine (R. Von Mises) [B.6 e 7], un evento ω_k – e quindi la parola lunga n che lo rappresenta - può considerarsi casuale se e solo se non è possibile descrivere, con una regola sugli indici, lo sviluppo delle sue cifre binarie. Per esempio, se

$$d_1(\omega_k)d_2(\omega_k)\ \dots\ d_{2n}(\omega_k) = 1_1\ 0_2\ 1_3\ 0_4\ \dots\ 1_{2n-1}\ 0_{2n}\ , \qquad (8)$$

con $n\in \boldsymbol{N}$, questa sequenza di cifre è descrivibile facilmente da una regola e quindi il numero non dovrebbe essere considerato casuale. Così è per altri numeri; per esempio: 1000…0001. Ora, l'assioma del disordine, pur essendo stimolante, è una pura tensione ideale nello studio della casualità di un numero, piuttosto che una procedura operativa. In effetti, nella stragrande maggioranza dei casi, non è possibile verificare se un numero risponde al requisito dell'assioma del disordine oppure no. Inoltre, se ogni numero $d_1(\omega)d_2(\omega)\ \dots\ d_n(\omega)$, formato in questo modo, ha probabilità costante pari a $P(d_1(\omega)d_2(\omega)\ \dots\ d_n(\omega)) = 2^{-n}$ di verificarsi, è necessario supporre che anche i numeri che si presentano come negli esempi precedenti siano casuali, indipendentemente dalla facile descrivibilità della loro sequenza. In effetti, alcuni tendono a distinguere un *a priori* da un *a posteriori*. A priori, infatti, ciascuna sequenza di 01 lunga n ha uguale probabilità di verificarsi; a posteriori, però, ci attendiamo – per l'assioma del disordine – che vi siano sequenze "più" casuali di altre e le identifichiamo in quelle che non presentano alcuna possibilità di essere descritte mediante regole sugli indici.

Negli anni sessanta del secolo scorso a cura di alcuni ricercatori, venne sollevato un problema associabile al problema dell'assioma del disordine. Ci si accorse, infatti che la descrizione di una sequenza "disordinata" di cifre binarie, richiedeva un numero di parole maggiore di una descrizione meno disordinata. Vennero allora considerati i concetti di *esprimibilità* e di *comprimibilità* di una sequenza di cifre binarie.

Un numero è *esprimibile* in vari modi, con diversi alfabeti. A parità di alfabeto, l'*esprimibilità* consiste nella possibilità di rappresentare un numero, ugualmente bene, in forma più o meno concisa. I numeri si possono dividere, perciò, in comprimibili e non comprimibili [B.1]. I *numeri comprimibili* sono quelli che possono essere espressi in forma concisa rispetto al loro sviluppo di cifre dell'alfabeto di riferimento. Esempi di numeri comprimibili sono i seguenti: tutti i numeri interi riconducibili alla forma $x!$, con $x\in \boldsymbol{N}$, come

263.130.836.933.693.530.167.218.012.160.000.000 = 32! ,

o quelli riconducibili alle espressioni x^n , con x e n interi positivi, come

1.267.650.600.228.229.401.496.703.205.376 = 2^{100}.

Dato un numero, se esso può essere compresso mediante una descrizione compatta che richieda un numero di cifre binarie inferiore a quelle necessarie per scrivere il numero stesso, allora esso non è propriamente casuale; altrimenti sì.

Il concetto intuitivo di numero «senza schema» richiede un'idea raffinata di casualità. Confrontiamo le seguenti due sequenze di cifre binarie:

0,1010101010101010101010101010101010101010101010

0,1001100001011001111001000011100000000010001000001

Si può notare che delle due sequenze, la prima ha più possibilità della seconda di essere espressa in una forma più sintetica.

Se l'esprimibilità di un numero può essere compressa, allora le riduzioni fatte (32! e 2^{100}), dimostrano che tali numeri non possono considerarsi generati dal caso puro (si tenga sempre presente che la valutazione è *a posteriori*). Sulla base di ciò è casuale quel numero che non può essere espresso da una sequenza di caratteri di un alfabeto minore di quello che compone il numero.

Nel tentativo di arrivare a formulare il concetto di caso (puro), è stato elaborato anche un altro concetto interessante: quello di *numero normale* [B.1 e 3]. Esso si basa sulla seguente definizione: Sia ω un numero lungo n (con n cifre) espresso in linguaggio binario. Si dice che esso è normale se

$$[n\to\infty]\Rightarrow\left\{P\left[\omega:\left|\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}d_k(\omega)-\frac{1}{2}\right|\geq\varepsilon\right]\to 0\right\}\ , \qquad (9)$$

dove il numero ω ha una sequenza di cifre binarie lunga n e $d_k(\omega)$ è definito come nella (2). La (9) è generalizzabile, con opportune modifiche, a qualsiasi alfabeto numerico.

Si può notare che la definizione di numero normale si basa sull'applicazione della legge debole dei grandi numeri; ritorna il tentativo di ammorbidire il caso "puro" riconducendolo a caso "impuro". Questa definizione, però, non può essere usata per determinare se un numero ω è o non è normale. Occorre di fatto accettare una variante più efficace, anche se meno rigorosa. Un numero si dice normale se la sua n-estensione di cifre è a frequenza uniforme, per ogni singola cifra. Per esempio, è presumibilmente normale π. Infatti:

π =3. 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 3 2 3 8 4 6
2 6 4 3 3 8 3 2 7 9 5 0 2 8 8 4 1 9 7 1
6 9 3 9 9 3 7 5 1 0 5 8 2 0 9 7 4 9 4 4
5 9 2 3 0 7 8 1 6 4 0 6 2 8 6 2 0 8 9 9
8 6 2 8 0 3 4 8 2 5 3 4 2 1 1 7 0 6 7 9
………………………………………...

$$f(0)=\frac{8}{100};\ f(1)=\frac{8}{100};\ f(2)=\frac{12}{100};\ f(3)=\frac{11}{100};\ f(4)=\frac{10}{100};$$
$$f(5)=\frac{8}{100};\ f(6)=\frac{9}{100};\ f(7)=\frac{8}{100};\ f(8)=\frac{12}{100};\ f(9)=\frac{14}{100}\ .$$

Come si vede, le prime 100 cifre di π manifestano una discreta uniformità di frequenza associata a ogni singola cifra. Una verifica d'ipotesi sulla variabile aleatoria $f_j - f_i\ ,\ \forall i\neq j$, fatta sulle prime 100 cifre di π porta a concludere che non esistono buone ragioni per credere che le differenze riscontrate tra le frequenze relative delle singole cifre osservate siano significativamente diverse tra di loro, al 95% di livello di affidabilità. Per tale ragione si dice che questo numero, π, presenta le caratteristiche di numero normale. È facile accorgersi che in generale *un numero razionale non è normale*. Dei numeri irrazionali si possiede solo una dimostrazione statistica della loro normalità. Infine, non risulta che se un numero è normale in un certo alfabeto, esso lo sia anche in tutti gli altri.

Per quanto concerne la ricerca di una definizione rigorosa della casualità pura, si è anche tentato di considerare l'idea di prevedibilità in senso debole. Sappiamo che un evento è prevedibile se esiste un modello matematico capace di valutare la possibilità che accada in un dato spazio e tempo con un'alta probabilità; in statistica si parla di livello fiduciario, che può essere del 95%, o a volte anche del 99%, del modello di previsione. Quando siamo in presenza di eventi a casualità pura, però, la prevedibilità va considerata come la capacità di un modello di prevedere che un evento (in questo caso una sequenza di cifre) accada con una probabilità di successo superiore al 50%. [*Segue al numero 91*]