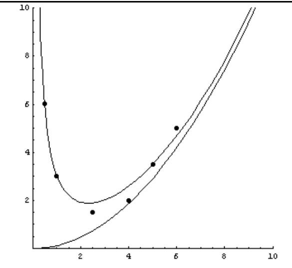
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 90 – aprile 2005



Introduzione al pensiero bayesiano

di Mauro Cerasoli [1]

Ogni tanto appare qualcuno con un elenco di "teoremi fondamentali o pietre miliari della matematica". William Dunham in "*Viaggio attraverso il genio*", per fare un esempio, ne elenca dodici, partendo dalla quadratura della lunula e finendo col teorema di Cantor. Tra questi, ma anche in altri elenchi, non c'è la formula o *teorema di Bayes*. Perché? Una risposta potreibe essere: William non lo conosce. L'altra: William non lo ritiene una pietra miliare o un grande teorema. Per entrambe le risposta non so che dire, bisogna chiedere a Dunham. Per la seconda posso solo affermare che si sente dire sempre più spesso in giro che il mondo degli scienziati si divide in due categorie: i *bayesiani* e i *non-bayesiani*.

Allora andiamo alla domanda che più ci riguarda in questa nota: cosa vuol dire essere bayesiani? A questa si può rispondere che per prima cosa bisogna avere una buona conoscenza della formula di Bayes e delle sue applicazioni concrete. Pertanto iniziamo a ricordarla e a fare alcuni esempi di applicazione.

1. Il problema del quiz (vedi Baclawski-Cerasoli-Rota, *Introduzione alla probabilità*, Edizioni UMI, Pitagora Editore, pag. 108)

Un esame a quiz ha varie risposte di cui soltanto una è esatta. Lo studente Pierino deve segnare quella giusta. Si suppone che egli tiri ad indovinare quando non conosce la risposta. Se Pierino risponde bene, qual è la probabilità che conoscesse la risposta?

Esempio concreto:

Il professore di Statistica giudica Pierino e gli propone come voto 25 (su 30). L'esame è stato fatto con quiz di 4 risposte. Pierino chiede che gli venga posta un'altra domanda, sempre a quiz. Il professore acconsente: se Pierino risponde bene, come cambia il suo voto?

Consideriamo gli eventi
H = "Pierino conosce la risposta",
H^c = "Pierino non conosce la risposta",
A = "Pierino ha risposto bene".

La domanda del reverendo *Thomas Bayes* è: "Se l'evento A si è verificato, qual è stata la causa: H oppure H^c ?". Ovvero: Pierino, avendo risposto bene, conosceva la risposta oppure ha tirato a indovinare? La probabilità $P(H\,|\,A)$ che sia stato H a far accadere A è data dalla formula di Bayes

$$P(H|A)=\frac{P(H)\cdot P(A|H)}{P(H)\cdot P(A|H)+P(H^C)\cdot P(A|H^C)} \qquad (1)$$

Il voto v in trentesimi di uno studente fornisce la probabilità $p = v / 30$ che egli conosca la risposta. Ad esempio, se uno studente ha preso 25 all'esame di Statistica, si può ritenere 25/30 ≈ 83,33% la probabilità che egli risponda bene ad una domanda sugli argomenti del programma di Statistica studiati. Sia $30p$ il voto di Pierino prima del quiz. Per la formula di Bayes, la probabilità richiesta è

$$P(H|A)=\frac{p\cdot 1}{p\cdot 1+(1-p)\cdot(1/s)}=p\cdot s/(1-p+p\cdot s)\,. \qquad (2)$$

Pertanto il nuovo voto di Pierino sarà
$30\cdot p\cdot s\,/\,(1-p+p\cdot s)$.

Per $s = 4$ e $p = v / 30$ questa formula si riduce a $40\cdot v\,/\,(10+v)$. Così per $v = 25$ si ottiene circa 28,57 e il nuovo voto di Pierino, arrotondato, dovrebbe essere 29 trentesimi.

2. Il problema dell'indagine di mercato

Riteniamo che il 70% dei consumatori preferisca il nostro prodotto (è migliore della concorrenza). Un sondaggio, se il prodotto è migliore, rivela che nell' 80% dei casi è migliore, mentre, se non lo è, rivela che solo nel 30% dei casi è migliore. Se il sondaggio rivela che il nostro prodotto è migliore, quale è la nuova probabilità che esso sia effettivamente migliore?

Si considerino gli eventi H = "il nostro nuovo prodotto è migliore di quello della concorrenza", A = "un'indagine di mercato ha rivelato che il nostro prodotto è migliore di quello della concorrenza". Allora
$P(H)$ = 70% (il 70% dei consumatori è nostro cliente),
$P(A\,|\,H)$ = 80%, $P(A\,|\,H^c)$ = 30%.
La formula di Bayes da $P(H\,|\,A) \approx$ 86,15%.

3. Il problema del bravo venditore

Una società ritiene che il 65% dei suoi venditori sia "bravo" nel vendere. Essa ha un "SAT, selling aptitude test" (criterio) per scegliere i suoi venditori. Da passate esperienze si sa che soltanto l'80% dei venditori bravi aveva passato bene il test mentre il 30% di quelli non bravi lo aveva passato bene. La società sta assumendo dei nuovi venditori tra alcuni candidati sottoponendoli al SAT: qual è la probabilità (percentuale di) che un candidato che passa il test risulti poi un bravo venditore?

Siano H = "il venditore è bravo", A = "il candidato passa il test SAT". Allora $P(H)$ = 65% (il 65% dei venditori è bravo), $P(A\,|\,H)$ = 80% , $P(A\,|\,H^c)$ = 30%. Quindi $P(H\,|\,A)$ = 83,2%.

4. Il problema degli ammalati

In una popolazione 1% delle persone ha l'epatite B. È noto che una analisi clinica rivela la malattia il 97% delle volte quando la persona è veramente malata, mentre solo il 5% delle volte rivela erroneamente l'epatite quando la persona è in realtà sana. Se una persona scelta a caso viene segnalata come malata, qual è la probabilità che essa abbia veramente l'epatite?

Si considerino gli eventi:
H = "la persona scelta a caso è malata",
A = "il test dice che è malata".
Allora $P(H)$ = 1% (percentuale dei malati), $P(A\,|\,H)$ = 97%, $P(A\,|\,H^c)$ = 5%. Quindi $P(H\,|\,A) \approx$ 16,38%.

Altri interessanti esempi di applicazione della formula di Bayes sono nel volume su citato, come un famoso problema di Lewis Carroll, l'autore di *Alice nel paese delle meraviglie*.

5. La posizione dei matematici

Scriveva Harold Jeffreys nel 1931, a proposito della formula di Bayes: *This is the principle of inverse probability, first given by Bayes in 1763. It is the chief rule involved in the process of learning from experience* (Questa è la formula più importante coinvolta nel processo di apprendimento dall'esperienza).

Più recentemente Gian Carlo Rota, nelle sue ultime dispense redatte da John Guidi nel 1998, ha scritto: "Una popolazione è composta di s persone. Alcune sono buone, altre no. Per esempio, un'urna contiene s palline: alcune sono rosse altre no. Vengono estratte n persone dalla popolazione (n palline dall'urna) senza rimessa. Se nel campione ci sono k persone buone (palline rosse) qual è l'inferenza più probabile sul numero di persone buone nella popolazione (di palline rosse nell'urna)? Il vero problema dell'induzione scientifica, o Legge di Bayes, è questo: un problema che si presenta sempre". Aggiunge inoltre Rota: "*The problem is that for a long time, people didn't believe in Bayes' Law. And now, there is a big turn towards Bayesian statistics. If you look at all the classic statistics books, the word Bayes is forbidden. And all this stuff is left out*.

Infatti William Feller, il maestro di Gian Carlo, probabilmente non aveva una buona opinione di Bayes. Scrisse a pagina 124 del suo famoso trattato *Introduction to Probability Theory* a proposito della formula: "*The beginner is advised always to do so and not to memorize the formula* (2.12) (la formula di Bayes), *which we shall now derive. It retraces in a general way that we did in special cases, but it is only a way of rewriting* (1.3) (la legge delle alternative, ovvero il denominatore della formula di Bayes, uguale alla $P(A)$). *Mathematically*, (2.12) *is a special way of writing* (1.3) *and nothing more*".

Feller non era il solo ad avere questa strana e pessima opinione della regola di Bayes. Anche l'altro grande matematico Alfred Renyi, nel suo *Foundations of Probability* del 1971, di ben 366 pagine, relega la dimostrazione della formula di Bayes in un esercizio a pag. 90 e poi non la tratta più.

Un'altra gaffe si può trovare nel trattato *Mathematical Statistics* del 1956, di B.L. van der Waerden, più famoso come algebrista per aver pubblicato il best seller *Modern Algebra* nel 1931, dove la formula e il nome di Bayes semplicemente non compaiono affatto. La formula di Bayes appare soltanto in un esercizio anche nel classico trattato *Calculus* di Tom M. Apostol sebbene questi tratti in modo esauriente e moderno la parte dedicata al calcolo delle probabilità. [*Segue al numero 91*]

[1] Presidente dell' ADT, già docente di Calcolo delle probabilità presso l'Università degli Studi de L'Aquila. E-mail: mceraso@tin.it

Punti di vista sulla conoscenza

di Luciano Corso

[*Segue dal n.* 87] Entrano di diritto a far parte dei grandi del pensiero filosofico, per quanto concerne la conoscenza, due pensatori che paiono trascurati dalla storia della filosofia. Essi sono Thomas Bayes ((nato nel Kent – England - 1702 e morto nel 1761) e George Boole (nato a Lincoln, England, nel 1815 e morto nel 1864).

Thomas Bayes, prete anglicano anticonformista, è vissuto sempre nella sua città natale come, del resto, Kant e altri grandi ingegni (non occorre evidentemente girare il mondo per produrre idee rivoluzionarie!). Nelle sua vita non ha pubblicato alcun lavoro, tuttavia dai suoi manoscritti che appaiono nella memoria postuma del 1764 con il titolo di *An essay toward solving a problem in the doctrin of chances,* pubblicata dalla Royal Society, di cui era membro, emerge una tesi semplice ma innovativa nel modo di affrontare la conoscenza della realtà. Come è esposto più in dettaglio nell'articolo di Mauro Cerasoli, pubblicato in questo numero, l'idea bayesiana si fonda sulla seguente interpretazione.

Supponiamo che si creda, sulla base di una data esperienza, che una certa ipotesi H (a priori) sia vera con un certo grado di fiducia (misura di probabilità, in senso scientifico). Se successivamente, un nuovo fatto (evento) ci informa ulteriormente riguardo all'oggetto della nostra indagine, come dovrà essere modificata la probabilità che la nostra ipotesi H sia vera? Cioè ogni nuova informazione riguardante la possibilità che sia vera la nostra ipotesi H, come deve essere trattata per trovare una misura del grado di fiducia di H a posteriori? Bayes, al contrario dei probabilisti del tempo che ritenevano che ogni nuova informazione, se incoerente rispetto a quelle precedenti, dovesse far ripartire da zero l'analisi del problema, con il suo famoso teorema, afferma che ogni nuova informazione si interseca con le precedenti, modificando il grado di fiducia su quanto conosciamo a priori. Perciò esso non appare più statico, secondo una comune e diffusa opinione del suo tempo, ma dinamico, in continua evoluzione. È proprio questa dinamicità del conoscere che muta le nostre convinzioni sulla verità.

Il teorema di Bayes

$$P(H|E)=\frac{P(H)\cdot P(E|H)}{P(E)}=$$

$$=\frac{P(H)\cdot P(E|H)}{P(H)\cdot P(E|H)+P(\neg H)\cdot P(E|\neg H)}$$

H = ipotesi a priori
E= nuovo evento che dà una nuova informazione
$\neg H$ (o anche H^C) = ipotesi complementare ad H
$P(H)$ = probabilità a priori sulla verità di H
$P(H \mid E)$ = probabilità a posteriori sulla verità di H, dopo che si è aggiunta la nuova informazione associata all'evento E
$P(E \mid H)$ = verosimiglianza.

A partire dalla metà del secolo scorso, questo teorema ha aperto un filone di studi fecondo e ricco di risultati scientifici importanti. In particolare, è nata la *statistica bayesiana* che ha aperto nuovi campi d'indagine e di applicazioni in ogni settore della ricerca scientifica. Rispetto alle concezioni galileiane, Bayes presenta un approccio statistico e sequenziale alla conoscenza.

Normalmente il contributo di questo autore al progresso epistemologico non è considerato nei libri di filosofia e questo appare una stranezza. È bene dire che Bayes ebbe il merito di presentare con chiarezza la sua analisi, corredandola di puntuali esempi e specificazioni. L'idea di Parmenide del *Panta rei* diventa così una realtà del pensiero, formale e rigorosa.

George Boole logico e matematico inglese fuori ogni regola, forse proprio grazie alla sua formazione da autodidatta ottenne nella sua vita risultati rivoluzionari dal punto di vista matematico e filosofico. Due sono i suoi grandi meriti: 1) aver sviluppato in modo organico e matematicamente rilevante le idee di Leibniz sul sistema di numerazione binaria e sulla sua algebra (famosi e modernissimi sono gli operatori booleani *and*, *or, not*); 2) aver capito, proprio grazie alla sua prima intuizione, l'importanza dei concetti di struttura algebrica e di struttura logica (famosa l'idea di σ-algebra di Boole, fondamento della teoria della misura). Oggi non è possibile comprendere nulla degli sviluppi attuali della meccanica, dell'elettronica, dell'informatica e della telematica senza aver compreso bene l'algebra di Boole, e infine non si può neppure pensare a una logica simbolica senza riferirsi ai suoi lavori. La logica di Boole esaurisce 2000 anni di tentativi di sistemare la logica simbolica in modo formale e meccanico a partire da Aristotele fino ai nostri giorni. Il *calculemus* di leibniziana memoria, con Boole, finalmente trova un percorso possibile sul quale generazioni di logici, matematici e informatici si sono cimentati. Tutta la teoria dei circuiti elettronici, meccanici e la moderna robotica si basa su l'algebra di Boole e chiunque oggi usi la potenza di Internet deve implicitamente fare i conti con questa algebra. Il "Vero" e il "Falso" diventano numeri: rispettivamente "1" e "0" ed ogni azione controllabile meccanicamente diventa una sequenza di 0 e 1. (*Segue al numero 96*).