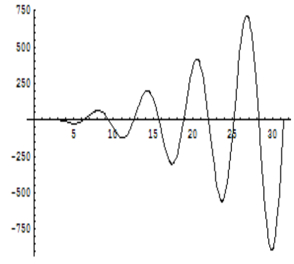
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 92 – giugno 2005



Introduzione al pensiero bayesiano

di Mauro Cerasoli [1]

[*Segue dal numero 91*]

8. Stimatori bayesiani

Si considerino una variabile aleatoria X di densità di probabilità $f(X;x)$ e un evento A. La densità condizionata di X all'evento A è indicata con $f(X;x\mid A)$. Essa è legata alla $f(X;x)$ dalla formula seguente

$$f(X;x\mid A)=\frac{f(X;x)\cdot P(A\mid X=x)}{\int_R f(X;x)\cdot P(A\mid X=x)\cdot dx}$$

La dimostrazione segue dal fatto che, per definizione,

$$f(X;x\mid A)=\lim_{h\to 0}\left[P\big((x\le X\le x+h)\mid A\big)/h\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{P\big((x<X\le x+h)\cap A\big)}{P(A)\cdot h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{P(x<X\le x+h)\cdot P\big(A\mid(x<X\le x+h)\big)}{h\cdot P(A)}=$$

$$=\frac{f(X;x)\cdot P(A\mid X=x)}{P(A)}$$

e infine $P(A)$ viene espressa con la legge delle alternative nel continuo.

La densità $f(X;x)$ viene chiamata dagli statistici *densità a priori (prior density)* mentre $f(X;x\mid A)$ è detta *densità a posteriori (posterior density)*. Un caso particolare, notevole, si ha quando l'evento A è il risultato osservato di un campione casuale X_1, X_2, ..., X_n ovvero quando è $A=(X_1=x_1\,,\ X_2=x_2\,,\dots,X_n=x_n)$ con x_1, x_2,..., x_n numeri reali (dati statistici).

Nel problema della stima di un parametro θ gli statistici bayesiani suppongono che esso *non sia una costante* ma una *variabile aleatoria X* dotata di una densità a priori $f(X;\theta)$. Alla luce dell'informazione dell'evento osservato $A=(X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_n=x_n)$, il parametro θ viene ad avere una densità a posteriori

$$f(X;\theta\mid X_1=x_1,X_2=x_2,\dots,X_n=x_n).$$

Il valor medio di questa densità è

$$\int_R \theta\cdot f(X;\theta\mid X_1=x_1,X_2=x_2,\dots,X_n=x_n)\,d\theta$$

Lo *stimatore bayesiano* di θ è tale valor medio quando, effettuato il calcolo dell'integrale, alle x minuscole si sostituiscono quelle maiuscole. Esso viene indicato con la scrittura

$$\left\langle f(\theta\mid X_1,X_2,\dots,X_n)\right\rangle$$

Consideriamo come esempio il parametro p (probabilità che una moneta dia testa) di una distribuzione binomiale e l'evento

$A=(I_1=i_1\,,\ I_2=i_2\,,\ \dots,\ I_n=i_n)$,

dove $I_n=0$ se all'n-esimo lancio esce croce e $I_n=1$ se esce testa. Supponiamo che p sia una variabile aleatoria X di densità a priori $f(p)$. Si vuole determinare la densità condizionata di p sapendo che in A si hanno k teste. Allora

$P(A\mid X=p)=p^{k}\,(1-p)^{n-k}$

Dalla formula sopra dimostrata si ha

$$f(p\mid A)=\frac{f(p)\cdot P(A\mid X=p)}{\int_R f(p)\cdot P(A\mid X=p)\cdot dp}=$$

$$=\frac{f(p)\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}}{\int_{[0,\,1]} f(p)\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}\cdot dp}$$

A questo punto è necessario stabilire la densità a priori $f(p)$ per poter proseguire nei calcoli. Supponiamo che il parametro p sia distribuito uniformemente in [0,1] ovvero che sia $f(p)=1$ su [0,1]. Allora la frazione si riduce a

$$f(p\mid A)=\frac{p^k\cdot(1-p)^{n-k}}{\int_{[0,\,1]} p^k\cdot(1-p)^{n-k}\cdot dp}$$

Ma l'integrale vale

$$\left[(n+1)\cdot\binom{n}{k}\right]^{-1}$$

e infine abbiamo

$$f(p\mid A)=(n+1)\cdot\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}\,.$$

Ora il valor medio di tale densità condizionata è

$$\int_{[0,\,1]} p\cdot(n+1)\cdot\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}\cdot dk=\frac{k+1}{n+2}\,.$$

Sostituendo k con S_n, numero di teste su n lanci, abbiamo lo stimatore bayesiano

$T=(S_n+1)/(n+2)$

Esso è lo stimatore di p alla luce dell'informazione "sono uscite k teste su n lanci" mentre S_n/n è lo stimatore corretto senza alcuna informazione.

Bibliografia: [B.1] K. Balclawski, M. Cerasoli, G.C. Rota, *Introduzione alla Probabilità*, UMI-Pitagora Ed. 1994. [B.2] M. Cerasoli, *Statistiche d'ordine discrete e formula di Bayes,* Boll. Doc. Mat. 47 (2003) 31-36. [B.3] M. Cerasoli, *Elementi di Probabilità*, Costabile Ed., in corso di stampa. [B.4] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. I, 1950-1970, Wiley. [B.5] H. Jeffreys, *Theory of Probability*, 1939 (ristampato nel 1985 dalla Clarendon Press di Oxford). [B.6] A. Renyi, *Foundations of Probability*, Holden-Day, 1971. [B.7] G.C. Rota, *Twelve problems in probability no one likes to bring up*, in *Algebraic Combinatorics Computer Science*, H. Crapo, D. Senato Eds, Springer 2001, pp. 57-93. [B.8] L. van der Waerden, *Mathematical Statistics*, Sprinter, 1969.

[1] Presidente ADT, già docente di Calcolo delle probabilità presso l'Università degli Studi de l'Aquila. E-mail : mceraso@tin.it

DALLE STRINGHE ALLE MEMBRANE

di Paolo Di Sia (*)

Le teorie di stringa

La formulazione *univoca* di una teoria ultima della natura potrebbe rappresentare una delle argomentazioni più convincenti in favore della sua specifica forma. Qualunque cambiamento potrebbe produrre assurdità di tipo logico e/o contraddizioni interne.

Le teorie di superstringa (per brevità dette di stringa) sono una classe di teorie di unificazione delle forze fondamentali i cui costituenti di base sono oggetti unidimensionali (detti appunto **stringhe**, o **corde**) anziché entità a dimensione nulla (**i punti**), situazione questa caratteristica della fisica anteriore a tali teorie. Per questa ragione le teorie di stringa sono in grado di superare i problemi delle teorie fisiche connesse alla presenza di particelle puntiformi (in particolare l'indesiderata presenza di infiniti).

Allo stato attuale esistono cinque diverse varianti della teoria delle stringhe. Esse differiscono per il modo in cui incorporano la **supersimmetria** (una particolare simmetria studiata dal 1974 con caratteristiche diverse rispetto alle ordinarie simmetrie conosciute, prima tra tutte il fatto di collegare tra loro particelle con spin diverso) e per caratteristiche pregnanti riguardanti i modi di vibrazione ammissibili delle stringhe, i loro costituenti di base.

Anche disponendo di una sola teoria con un unico insieme di equazioni, l'inevitabilità della stessa potrebbe essere compromesso dal fatto che le equazioni ammettono molte soluzioni possibili e ogni soluzione ammette un universo con proprietà diverse. Le equazioni presentano un alto grado di complessità e per poterle trattare sono state utilizzate forme approssimate. Tali equazioni approssimate risultano diverse da una teoria all'altra. Studi partiti dal 1995 sembrano indicare che le equazioni esatte (ancora in fase di studio) potrebbero risolvere tali problemi ed imprimere sulla teoria un "sigillo di inevitabilità". Le ricerche hanno permesso di stabilire che le equazioni esatte connettono le cinque teorie tra di loro; in precedenza, infatti, esse erano considerate scorrelate. I recenti sviluppi indicano che esse si fondono in un unico schema onnicomprensivo, denominato **teoria M** (dove **M** è variamente indicato come *mistero*, *madre*, *matrici*, **membrane**).

Le teorie in questione vengono studiate mediante il metodo perturbativo. Una teoria perturbativa risulta essere una prima approssimazione, che viene resa poi sempre più accurata considerando dettagli particolari inizialmente trascurati; i dettagli sono *le perturbazioni*. I miglioramenti successivi devono fornire correzioni relativamente piccole affinché il metodo funzioni. La teoria delle stringhe risulta allo stato attuale incompleta anche per l'inadeguatezza dei metodi di approssimazione. Il metodo perturbativo permette di determinare come due stringhe interagiscono e anche di ricavare le equazioni fondamentali della teoria. Un elemento determinante riguarda l'impossibilità di calcolare il valore esatto di una costante fondamentale per tali teorie, la **costante di accoppiamento di stringa**. Tale costante è rappresentata da un numero (positivo) che stabilisce la probabilità che una data stringa si divida in due e viceversa, essendo questi i processi fondamentali di tali teorie. Il valore della costante si determina attraverso un'equazione. Ogni teoria ha la sua costante; vi è infatti un insieme di valori (**minori** e **maggiori** dell'unità) e si parla di accoppiamento rispettivamente **debole** e **forte**.

Le membrane

Con l'aumentare della costante di accoppiamento di stringa diventa visibile una nuova dimensione. La stringa si dilata in una **membrana**, diventa una membrana la cui larghezza è controllata dal valore della costante di accoppiamento. Lo schema perturbativo (con costante minore di 1) conduce ad un *universo a* 10 *dimensioni con stringhe ad* 1 *dimensione*; tale scenario sembra essere l'approssimazione di un *universo a* 11 *dimensioni con membrane a* 2 *dimensioni*.

Lo studio delle configurazioni di tali teorie (i cosiddetti **stati BPS)** (con proprietà determinabili attraverso argomentazioni basate sulla simmetria) ha condotto alla valutazione delle loro masse, cariche e forma geometrica. Alcuni stati BPS sono *stringhe unidimensionali*, altri *membrane bidimensionali*, ma vi sono anche oggetti con dimensioni superiori. Esistono tante possibilità quante il numero di dimensioni spaziali.

Malgrado la presenza di questi oggetti estesi con un numero diverso di dimensioni spaziali, le stringhe (o **1-brane**) mantengono comunque un ruolo particolare; è stato infatti mostrato che la massa degli oggetti estesi di qualsiasi dimensione, *con la sola eccezione delle stringhe*, è inversamente proporzionale al valore della costante di accoppiamento della rispettiva teoria. Ciò implica che nel caso di teorie **debolmente accoppiate** tutti gli oggetti estesi (*tranne le stringhe*) abbiano masse "enormi" (circa 10^{-5} g, cioè molti ordini di grandezza più pesanti della massa di Planck). Da ciò segue che per essere prodotti richiederebbero energie assai elevate; hanno perciò un effetto trascurabile su buona parte della fisica. Aumentando la costante, invece, le **brane multidimensionali** diventano più leggere e quindi più importanti.

Sull'importanza delle membrane

Il formarsi della nuova dimensione, come si diceva, modifica la struttura stessa della stringa; la stringa unidimensionale iniziale si trasforma in un "nastro" bidimensionale all'aumentare della costante di accoppiamento di stringa. Può essere fatto un parallelo interessante:

a) la **membrana** ha una "larghezza" così piccola da sembrare una **stringa**;

b) l'**undicesima** dimensione risulta così piccola da non essere percepibile utilizzando le equazioni perturbative.

Le brane multidimensionali (dette anche **p-brane**) giocano comunque un ruolo di grande importanza nell'ambito della teoria delle stringhe. Le equazioni approssimate (frutto dei metodi perturbativi) indicavano come possibile il collasso di una 4-sfera (cioè una sfera in 4 dimensioni) in uno *spazio di Calabi-Yau* (per spazio (o varietà) di Calabi-Yau si intende lo spazio geometrico, in cui si possono compattificare le dimensioni spaziali extra previste dalla teoria delle stringhe, *in accordo* con le equazioni della teoria). Ciò avrebbe dato origine a conseguenze estremamente negative. Si potrebbe cioè creare una strozzatura nella trama dello spazio (per tale argomento vedasi anche MatematicaMente n. 86 (dic. 2004)) con conseguente produzione di indesiderati infiniti.

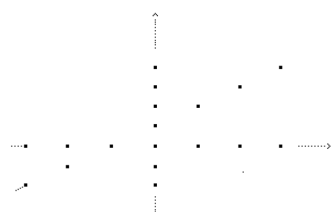
Una stringa (o 1-brana) può circondare totalmente una parte di spazio unidimensionale (come ad esempio una circonferenza); così una 2-brana (una membrana bidimensionale) può avvolgere e ricoprire completamente una parte di spazio bidimensionale, come la superficie di una 3-sfera (indicando in questo modo l'ordinaria sfera tridimensionale). Studi iniziati nel 1995 (e basati su lavori di Witten e Seiberg) hanno sviluppato l'idea in dimensioni superiori, portando a concludere che le 3-brane possono avvolgere e ricoprire completamente la superficie di una 4-sfera, superficie che è tridimensionale. Le 3-brane costituiscono pertanto una protezione in grado di neutralizzare i dannosi effetti dovuti all'eventuale collasso di 4-sfere.

La dinamica di tale circostanza può essere così riassunta: la superficie di una 4-sfera in uno spazio di Calabi-Yau collassa senza "eventi disastrosi", perché può essere "protetta" da una 3-brana avvolta attorno ad essa.

Grande interesse speculativo ed applicativo suscita anche lo studio delle **zero-brane** (per tale argomento vedasi anche MatematicaMente n. 81 (lug. 2004))

(*) disia@sci.univr.it

Retta discreta



$Y=(1/2)\cdot x+1$ dom: $\{x|x=2\cdot n,\ n\in Z,\ y\in Z\}$