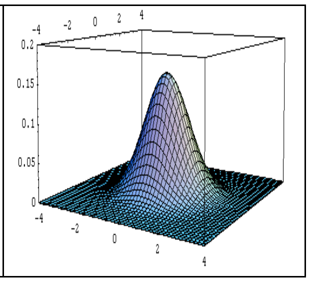
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432

e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 93 – luglio 2005



Durata media di una passeggiata a caso con barriere assorbenti

(caso unidimensionale)

di Luciano Corso

Consideriamo un punto che si muove su una retta discreta y. Parte da un punto $y_0 = a$ e ad ogni passo si può spostare o in avanti (verso posizioni di y crescenti) o indietro (verso posizioni di y decrescenti) a seconda che si verifichi un certo evento E con probabilità p o il suo complementare $\neg E$ con probabilità q. La sequenza dei passi viene segnata sull'asse delle ascisse *t* (fig. 1):

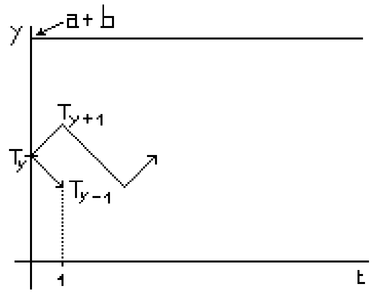


fig. 1

La passeggiata sull'asse y viene così sviluppata sul piano e ciò consente una più chiara esposizione della situazione. Il punto si può muovere soltanto in due versi opposti e il suo cammino si arresta solo quando raggiunge le due barriere $y = 0$ e $y = a+b$. Quando il processo si interrompe per tale ragione, si dice che lo schema dinamico è a barriere assorbenti.

Possiamo avere processi a barriere con diverse proprietà. Se le barriere fermano il movimento, esse sono di tipo assorbente (come già detto); se le barriere non fermano il processo e si limitano a respingere il punto all'interno dello spazio da percorrere - secondo particolari regole di riflessione - esse di dicono riflettenti; se, infine, esse fungono da filtri attraverso i quali cambiano i comportamenti dinamici (le regole del movimento) del punto, esse si dicono filtranti.

Lo studio di un processo molto semplice come quello qui presentato richiede una matematica alquanto sofisticata non appena ci si pongono alcuni quesiti.

1) È possibile trovare una relazione che determini la durata media della passeggiata, data la posizione del punto alla partenza?
2) Qual è la probabilità che un punto partendo dalla posizione $y = a$ sulla retta venga assorbito in n passi dalla barriera $y = 0$ o dalla barriera $y = a + b$?
3) Qual è la probabilità che il punto torni dopo n passi nella posizione di partenza?

Proverò a dare risposta al primo quesito, lasciando ai lettori il compito di risolvere gli altri due.

Durata media della passeggiata

Con riferimento alla fig. 1, poniamo

t_y = "durata della passeggiata quando il punto parte da y". Sulla base di ciò possiamo scrivere la seguente equazione alle differenze:

$$t_y = \left(t_{y-1}+1\right)\cdot q + \left(t_{y+1}+1\right)\cdot p \qquad (1)$$

La relazione è chiara (il grafico di fig.1 aiuta a capire); essa dice che la durata del cammino quando si parte dalla posizione y è legata alle durate dei cammini successivi dati da 2 sole posizioni possibili, dopo un passo: o $y-1$, che si può raggiungere se si verifica $\neg E$, e ciò è possibile con probabilità q, o $y+1$, che si può raggiungere se si verifica E, e ciò è possibile con probabilità p. La (1), con facili passaggi, diventa:

$$t_y = p\cdot t_{y+1} + q\cdot t_{y-1} + 1\,.$$

Calcoliamo la durata media:

$$M\left(t_y\right) = p\cdot M\left(t_{y+1}\right) + q\cdot M\left(t_{y-1}\right) + 1 \qquad (2)$$

Semplifichiamo ora la scrittura ponendo $M(t_y)=T_y$; si ottiene:

$$T_y = p\cdot T_{y+1} + q\cdot T_{y-1} + 1\,. \qquad (3)$$

L'equazione così ottenuta è una equazione alle differenze del secondo ordine non omogenea [B.1]. Risolviamola. Si pone

$$T_y = \lambda^y \qquad (4)$$

e sostituendo in (3) si ottiene:

$$\lambda^y = p\cdot\lambda^{y+1} + q\cdot\lambda^{y-1} + 1$$

$$\lambda^y\left(p\cdot\lambda^2 - \lambda + q\right) = -1 \qquad (5)$$

L'equazione caratteristica ammette due radici distinte:

$$\lambda_1 = 1 \quad ; \quad \lambda_2 = q/p\,. \qquad (6)$$

Otteniamo, così:

$$T_y = C_1\cdot\lambda_1^y + C_2\cdot\lambda_2^y = C_1 + C_2\cdot\left(q/p\right)^y \qquad (7)$$

Determiniamo la soluzione particolare nel caso in cui $p = q = 1/2$. La (3) diventa:

$$T_{y+1} - 2\cdot T_y + T_{y-1} = -2\,. \qquad (8)$$

Questa è una equazione alle differenze finite del 2° ordine. Come è noto [B.1], la sua soluzione va cercata combinando la soluzione generale dell'omogenea associata con la soluzione particolare. Cioè:

$$\left(\lambda^2 - 2\cdot\lambda + 1\right)\cdot\lambda^{y-1} = 0 \quad ; \quad \lambda^2 - 2\cdot\lambda + 1 = 0$$

da cui: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 1$. La soluzione dell'omogenea è:

$$T_y = C_1\cdot 1^y + C_2\cdot y\cdot 1^y = C_1 + C_2\cdot y \qquad (9)$$

Determiniamo la soluzione particolare; poniamo allora z_y soluzione particolare di (8) e consideriamo la forma:

$$z_y = \alpha + \beta_1\cdot y + \beta_2\cdot y^2\,. \qquad (10)$$

Calcoliamo le differenze finite prime e seconde di (10):

$$\Delta z_y = z_{y+1} - z_y = 2\cdot\beta_2\cdot y + \beta_1 + \beta_2 \qquad (11)$$

$$\Delta^2 z_y = \Delta\left(\Delta z_y\right) = 2\cdot\beta_2\,.$$

Da qui, costruiamo l'identità seguente:

$$z_{y+2} - z_{y+1} - z_{y+1} + z_y = z_{y+2} - 2\cdot z_{y+1} + z_y$$

$$\alpha + \beta_1\cdot(y+1) + \beta_2\,(y+1)^2 - 2\left(\alpha + \beta_1\cdot y + \beta_2\cdot y^2\right) +$$

$$+\,\alpha + \beta_1\cdot(y-1) + \beta_2\cdot(y-1)^2 = -2\,,$$

dopo aver semplificato, si ottiene:

$$2\cdot\beta_2 = -2 \quad ; \quad \beta_2 = -1\,.$$

β_2 è il coefficiente di y^2. Si ha:

$$z_y = -y^2$$

e quindi la soluzione generale diventa:

$$T_y = -y^2 + C_1 + C_2 \cdot y \quad . \tag{12}$$

Ora determiniamo la soluzione particolare di (3) quando $p \neq q$. Posto, anche in questo caso, z_y tale soluzione particolare e considerata la forma seguente:

$$z_y = a + b_1 \cdot y + b_2 \cdot y^2 ,$$

si ha:

$$z_{y+1} = a + b_1 \cdot (y+1) + b_2 \cdot (y+1)^2$$

$$z_{y-1} = a + b_1 \cdot (y-1) + b_2 \cdot (y-1)^2$$

$$p\left(a + b_1 \cdot y + b_1 + b_2 \cdot y^2 + 2 \cdot b_2 \cdot y + b_2\right) - a - b_1 \cdot y - b_2 \cdot y^2 +$$

$$+ q \cdot \left(a + b_1 \cdot y - b_1 + b_2 \cdot y^2 - 2 \cdot b_2 \cdot y + b_2\right) = -1$$

$$(p-q) \cdot b_1 + b_2 + 2 \cdot (p-q) \cdot b_2 \cdot y = -1$$

$$2 \cdot (p-q) \cdot b_2 \cdot y + b_2 + (p-q) \cdot b_1 = -1$$

L'identità è verificata quando:

$$\begin{cases} 2 \cdot (p-q) \cdot b_2 = 0 \\ b_2 + (p-q) \cdot b_1 = -1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} b_2 = 0 \\ b_1 = (q-p)^{-1} \end{cases} ,$$

$$z_y = y / (q-p) .$$

Questa soluzione va aggiunta in (7). Si ottiene così la soluzione generale di (3) nel caso in cui $p \neq q$.

Quindi si sono ottenute le soluzioni generali:

$$\begin{cases} T_y = -y^2 + C_1 + C_2 \cdot y & se \quad p = q \\ T_y = \dfrac{y}{q-p} + C_1 + C_2 \cdot \left(\dfrac{q}{p}\right)^y & se \quad p \neq q \end{cases} \tag{13}$$

Ora c'è da determinare C_1 e C_2. Considerando le ragionevoli condizioni $T_0=0$ e $T_{a+b}=0$ si ha:

$T_0 = 0 + C_1 + C_2 \cdot 0 \quad : C_1 = 0$

$T_{a+b} = [-(a+b)^2 + C_1 + C_2(a+b)]$

$0 = -a^2 - 2ab - b^2 + C_1 + C_2(a+b)$

$C_2 = (a+b)^2 / (a+b) = a + b$

$$T_y = y(a + b - y) . \tag{14}$$

Siccome $0 = C_1 + C_2$ si ha :

$$0 = \frac{a+b}{q-p} + C_1 + C_2 \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} \quad ; \quad 0 = \frac{a+b}{q-p} - C_2 + C_2 \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}$$

$$\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1\right] C_2 = -\frac{a+b}{q-p}$$

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{a+b}{q-p} \cdot \left[\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b} - 1\right]^{-1} \\ C_2 = -\dfrac{a+b}{q-p} \cdot \left[\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b} - 1\right]^{-1} \end{cases}$$

Da cui T_y è

$$T_y = \frac{y}{q-p} + \frac{a+b}{q-p} \cdot \left[\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1\right]^{-1} +$$

$$- \frac{a+b}{q-p} \cdot \left[\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1\right]^{-1} \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^y$$

Semplificando, si ottiene infine il seguente sistema:

$$T_y = \begin{cases} y \cdot (a + b - y) & se \ p = q \\ \dfrac{y}{q-p} - \dfrac{a+b}{q-p} \cdot \dfrac{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^y}{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b}} & se \ p \neq q \end{cases} \tag{15}$$

Questo sistema di equazioni descrive, dunque, la durata media di una passeggiata a caso nelle condizione viste sopra.

Bibliografia: [B.1] Fulvio Arcangeli, *Elementi di Calcolo alle differenze finite*, Istituto di Matematica, Facoltà di Economia, Unirsità degli studi di Padova, Verona, 1976; [B.2] Luciano Daboni, *Calcolo delle probabilità ed elementi di statistica*, UTET, Torino, 1980; [B.3] William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I, Wiley & Sons, New York, 1968

«La matematica offre il più brillante esempio di una ragion pura che si estende felicemente da sé, senza il contributo dell'esperienza».

Tratto da: I. Kant, Critica della ragion pura, Bompiani editore, pag. 1015. Un libro da consigliare ai detentori della verità.

Problema su un noto teorema di Chasles

di Nazario Magnarelli [1]

[*Segue dal n. 91*]

Ora, i piani che ci danno la generatrice g permettono di costruire il fascio:

$$\lambda \cdot x + \mu \cdot (2 \cdot y - z) = 0 , \tag{5}$$

per il quale si pone $k = \lambda / \mu$.

Si può verificare subito quanto segue:

1') Per $\lambda = 4$, $\mu = -1$, cioè per $k = -4$, si ha il piano

$4 \cdot x - 1(2 \cdot y - z) = 0$,

che coincide con il piano tangente nel punto $A(0, -1, -2)$.

2') Per $\lambda = 0$, $\mu = -1$, cioè per $k = 0$, si ha il piano

ω: $-2 \cdot y + z = 0$,

che coincide con il piano tangente nel punto $O(0, 0, 0)$.

3') Per $\lambda = -4$, $\mu = -1$, cioè per $k = 4$ si ha il piano

β: $-4 \cdot x - 2 \cdot y + z = 0$,

che coincide con il piano tangente nel punto $B(0, 1, 2)$.

4') Per $\lambda = -8$, $\mu = -1$, cioè per $k = 8$, si ha il piano

γ: $-8 \cdot x - 2 \cdot y + z = 0$.

che coincide con il piano tangente nel punto $C(0, 2, 4)$.Come si vede, esiste una corrispondenza biunivoca algebrica tra i valori di y e i corrispondenti valori di k e quindi si ha una proiettività tra i punti P della direttrice h e i piani del fascio tangenti alla quadrica nei punti stessi. Prese due terne di valori corrispondenti l'equazione della proiettività si ottiene dall'eguaglianza di birapporti:

$$(-1, 0, 1, y) = (-4, 0, 4, k) . \tag{6}$$

Procedendo nei calcoli , si ha: (*)

$$\frac{(-1,0,1)}{(-1,0,y)} = \frac{(-4,0,4)}{(-4,0,k)} ,$$

$$\frac{1+1}{1-0} : \frac{y+1}{y-0} = \frac{4+4}{4-0} : \frac{k+4}{k-0} , \ \rightarrow \ \frac{y}{y+1} = \frac{k}{k+4} , \tag{*}$$

$$\text{infine } k = 4 \cdot y . \tag{*}$$

Possiamo subito verificare l'esattezza di questa formula. Per $y = 2$, si ha $k = 8$, cioè $\lambda = -8$, $\mu = -1$.

Nel fascio di piani $\lambda \cdot x + \mu \cdot (2 \cdot y - z) = 0$, a questi due valori di λ e μ corrisponde il piano $-8 \cdot x - 2 \cdot y + z = 0$. Ma questa equazione ci dà esattamente il piano tangente nel punto C(0, 2, 4) della generatrice, che avevamo ottenuto con i metodi dell'Analisi Matematica.

[1] Fisico in quel di Latina