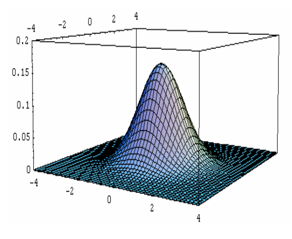
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 94 – agosto 2005



Mean square interpolation
A CLIL didactic application

by Luciano Corso [1]

The mean square principle consists in finding the parameters of the model that passes among the experimental points minimizing the sum of the squares of the deviations lags (gaps) between experimental values and theoretical values (in the hypothesis that the model explains the phenomenon).
The formal relation is the following:

$$Min\left[S(\ .\ )\right] = Min\left[\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \hat{y}_j\right)^2\right] \quad , \qquad (1)$$

where S(.) is a function of the parameters of the theoretical model $\hat{y}_j$ and y_j are the observed values, n is numerousness of the sample.
To apply this method, the following conditions are necessary:
1) to have the experimental data;
2) to know that the model we consider is fit to describe the observed data;
3) to have a mathematical model linear in the parameters.

To demonstrate how the mean square principle works, we make the following example.
Suppose we have done an experiment to know the relation between X = "dose of drug in $mg\ /\ l$" and Y = "contained of uric salt in $dg\ /\ l$". we have checked $n = 6$ patients and found the values reported in the following table:

X	0,5	1	2.5	4	5	6
Y	6	3	1,5	2	3,5	5

A visual observation of the Cartesian coordinates of the phenomenon tells us to think that more fit model to describe the observed points is the following:

$$\hat{y} = a \cdot x^2 + \frac{b}{x} \qquad (2)$$

We have to estimate using the mean square method the parameters a and b of the model (2).
Then, we verify how this model is good to describe the behaviour of the two variables.
What is it the best dose of drug to give patients aimed to obtain their best reaction?

Solution:

From (1) we have;

$$S(a,b) = \sum_{j=1}^{6}\left(y_j - a\cdot x_j^2 - \frac{b}{x_j}\right)^2 . \qquad (3)$$

To find the minimum of the $S(a\ ,\ b)$, as known from the mathematical analysis, we have to find the partial derivatives first; that is:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(a,b)}{\partial a} = \sum_{j=1}^{n} 2\cdot\left(y_j - a\cdot x_j^2 - \dfrac{b}{x_j}\right)\cdot\left(-x_j^2\right) \\ \dfrac{\partial S(a,b)}{\partial b} = \sum_{j=1}^{n} 2\cdot\left(y_j - a\cdot x_j^2 - \dfrac{b}{x_j}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{x_j}\right) \quad . \end{cases} \qquad (4)$$

Then we put them equal to zero:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}\left(y_j - a\cdot x_j^2 - \dfrac{b}{x_j}\right)\cdot\left(-x_j^2\right) = 0 \\ \sum_{j=1}^{n}\left(y_j - a\cdot x_j^2 - \dfrac{b}{x_j}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{x_j}\right) = 0 \quad . \end{cases} \qquad (5)$$

Multiplying and putting in order we obtain:

$$\begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^4\right)\cdot a + \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\cdot b = \sum_{j=1}^{n} x_j^2\cdot y_j \\ \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\cdot a + \left(\sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{x_j^2}\right)\cdot b = \sum_{j=1}^{n}\dfrac{y_j}{x_j} \end{cases} \qquad (6)$$

Now, we have to apply to the system the results of the experimental working-out. In the Table 1 we summarize what we have done.
The system (6) becomes

$$\begin{cases} 2217{,}125\cdot a + 19\cdot b = 313{,}375 \\ 19\cdot a + 5{,}8528\cdot b = 172333 \quad . \end{cases} \qquad (7)$$

By solving the system we find

$$\begin{cases} a \approx 0{,}11636 \\ b \approx 2{,}91525 \end{cases}$$

where the symbol "≈" indicates that the values are an acceptable approximation of the true values.
So the model is:

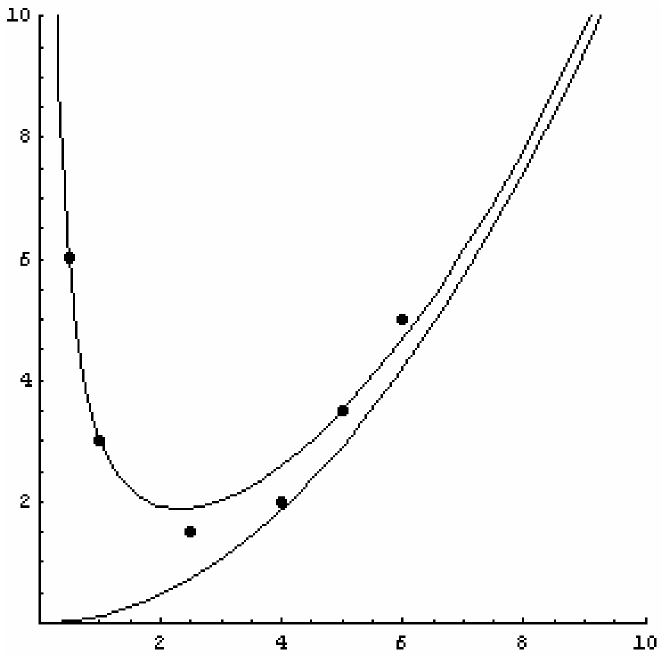
$$\hat{y} = 0{,}11636\cdot x^2 + \frac{2{,}91525}{x} \quad .$$

Now, we have to give a graphical representation of the problem.

Table 1

x_j	y_j	x_j^4	$1/x_j^2$	$x_j^2\cdot y_j$	y_j/x_j	$\hat{y}_j$	$\left(y_j-\hat{y}_j\right)^2$
0,5	6	0,0625	4	1,5	12	5,85959	0,7566
1	3	1	1	3	3	3,03161	0,1091
2,5	1,5	39,0625	0,16	9,375	0,6	1,89335	0,0724
4	2	256	0,0625	32	0,5	2,59058	0,3022
5	3,5	625	0,04	87,5	0,7	3,49206	0,000013
6	5	1296	0,02778	180	0,8333	4,67484	0,07529
Sums							
19	21	2217,125	5,8528	313,375	17,2333	21,54203	1,3156

We use program MATHEMATICA to draw the graph. See picture 1.



Picture 1. The model and the experimental data.

Finally, we evaluate the quality of the fit done. We use I_2 index, that is a relative variation coefficient. It is:

$$I_2 = \frac{\sqrt{V\left(y_j \middle| \hat{y}_j\right)}}{M\left(\hat{y}_j\right)} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \hat{y}_j\right)^2}}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \hat{y}_j} \approx$$

$$\approx \frac{\sqrt{\frac{1,3156}{6}}}{\frac{1}{6} \cdot 20,3397} \approx 0,1381$$

The result confirms that the model is acceptable.

Now, we give the latest answer:

The best dose of drug is that one which minimizes the contents of uric salt in the patient. To find this minimum we must derive the theoretical function and look for which values of x the derivative is equal to 0. That is:

$$\hat{y}' = 0.23272 \cdot x - \frac{2.91525}{x^2}$$

$$0.23272 \cdot x - \frac{2.91525}{x^2} = 0$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{2.91525}{0.23272}} \approx 2.32246$$

Replacing this value to *x* of the model, we find the minimum point; that is:

$$\left(x \approx 2.32246 \; ; \; \hat{y} \approx 1.52548\right)$$

We are sure this is a minimum, because the second derivative of the function assumes for $x \approx 2.32246$ a positive value.

So, the best dose of drug corresponds to 2.32246 mg / l.

[1] Teatcher of Applied Mathematics for course of Informatics at ITIS G. Marconi of Verona – e-mail: lcorso@iol.it - Verona 19 – 04 -2005

Perché questo articolo è stato scritto

La scuola sta cambiando velocemente. La lingua Inglese è centrale in questo cambiamento ed essa sta diventando il fondamento della comunicazione scientifica e tecnologica in tutto il mondo. Oggi più che mai occorre preparare i giovani che si orientano verso indirizzi di studio scientifici e tecnologici ad acquisire un bagaglio di conoscenze specifiche anche nella lingua inglese, onde evitare che essa figuri come la lingua di comunicazione generica, ma non abbia alcun riferimento alle specificità proprie di chi affronta studi scientifici.

Per tale ragione e su indirizzo ministeriale, quest'anno la dirigenza scolastica della scuola in cui lavoro mi propose, in febbraio, di aderire ad un progetto di insegnamento della matematica applicata in lingua inglese. L'iniziativa si inquadra nel progetto CLIL (C*ontents and* L*anguage* I*ntegrated* L*earning*) che dà la possibilità di insegnare in lingua inglese una disciplina curricolare.

L'esperienza pilota mi ha richiesto molte energie (come al solito male pagate). Si trattava di preparare in inglese due unità didattiche nell'ambito del programma ministeriale di Matematica Applicata da svolgere nel corso di studi ad indirizzo informatico. Queste unità dovevano essere svolte da me in inglese nel corso ordinario di studi e con la presenza di un madrelingua che avesse almeno qualche competenza nel campo della matematica. I giovani, come al solito, hanno partecipato con entusiasmo all'esperienza.

L'esperimento ha interessato solo quattro professori della scuola con queste specializzazioni: Matematica, Matematica Applicata, Informatica ed Elettronica. La sperimentazione dovrebbe continuare in questo nuovo anno scolastico (2005-'06), passando dallo sviluppo di una sola unità didattica allo svolgimento di un intero modulo in alcune classi 4^e.

Il documento del 15 maggio: da redigere per chi ?

di Ivano Arcangeloni

Costretti all'autoreferenzialità. Mi sorrido nel fluire del tempo pomeridiano di questa domenica di maggio. Guardo l'orologio, mi rimprovero. Dovrei tornare al "Documento", se no, quando lo finisco? Ma *non ce la faccio*. La mente vaga, si libera dagli adempimenti burocratici, *arrischia la fuga*. Cerca la libertà. Una boccata di ossigeno. E si rifugia nei libri, nelle letture di questo periodo. Tutto si collega. Tutto torna. Ah, fortunati noi, però! Noi insegnanti che la domenica di maggio lavoriamo, e che quando eravamo studenti la domenica studiavamo. Perché *grazie a questo*, grazie a questa abitudine al *sacrificio*, riusciamo a sopportare anche queste insulsaggini. E a godere di quello che conosciamo. Barrow, dunque. John D. Barrow. Pensiamoci su un attimo: l'autoreferenza è un paradigma del XX secolo, ma noi siamo già in pienissimo XXI secolo. E l'autoreferenza era del secolo scorso. E il nuovo secolo? Cosa ci prospetta? La *realtà virtuale*. Questo, secondo Barrow, è il nuovo filo sottile che collega arti a scienze. Mi fido di lui. E penso di nuovo alle *Grigie Menti*. E mi viene voglia di avvisarvi *tutti*, cari colleghi! Sono già all'opera! Attenti, attenti! Non stanno, già da un po' di anni, parlando di cambiare ancora l'Esame di Stato? Non circola già da un po' la voce secondo la quale le famose Terze Prove saranno nazionali e corrette sempre a livello nazionale? E chi mai potrà correggerle? Forse una squadra di Saggi e molto Sapienti Docenti? Con molta pazienza e molto tempo libero? No! Li correggerà il computer! Ci saranno dei questionari a crocette, anzi con delle caselline nere da riempire, che verranno consegnati ai ragazzi, verranno ritirati da noi, messi in una grande busta gialla, con l'immancabile sigillo in ceralacca, così, per rispetto della tradizione, spediti a Roma, a un grande Computer Centrale. Corretti. E rispediti indietro. Il computer dirà: studente Tal dei Tali 12, studentessa Tal Altra 14, e noi ci inchineremo alla *Nuova Oggettività delle Macchine*. Eccolo là, già pronto, il Correttore Virtuale. Speriamo che almeno lui vorrà leggerlo il nostro "Documento del 15 maggio". Perché senza leggere quello come farà a *predisporre* la prova da *somministrare* ai nostri pupilli?