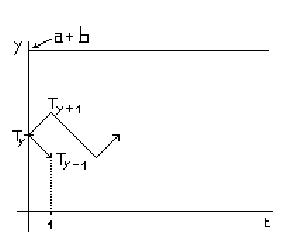
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 95 – settembre 2005



LE EQUAZIONI RISOLTE CON IL RICORSO ALLA GEOMETRIA

di Luigi Landra

Le soluzioni di problemi nei quali viene richiesto di trovare il valore incognito x quando è data una relazione che è l'equivalente di una moderna equazione, si trovano già su un famoso papiro egiziano, tra quelli - come afferma Boyer in [B.1] a pag. 14 - «[…] che in un modo o nell'altro sono sopravvissuti alle ingiurie del tempo per tre millenni e mezzo. Il più esteso, tra quelli di natura matematica, è un papiro largo circa 30 cm e lungo circa 5,46 m, che si trova ora al British Museum (ad eccezione di pochi frammenti conservati nel Museo di Broocklyn). Era stato acquistato nel 1858 in una città balneare sul Nilo da un antiquario scozzese, Henry Rhind, e perciò è conosciuto spesso sotto il nome di Papiro di Rhind o, meno frequentemente, di Papiro di Ahmes, in onore dello scriba che lo aveva trascritto verso il 1650 a.C.».

Detti problemi chiedono di trovare l'equivalente di soluzioni di equazioni lineari, che corrispondono, con il simbolismo moderno, ad $ax = b$ oppure ad $ax + bx = c$, dove a, b, c sono noti, mentre x non lo è. L'incognita veniva indicata con il termine "aha" o mucchio. Se si considera x la lunghezza di un lato di un rettangolo, o ax o bx corrispondono alla loro area, dove a e b sono, rispettivamente, le lunghezze possibili dell'altro lato. Trovare perciò la soluzione del problema vuol dire calcolare il valore della x che soddisfi l'uguaglianza. In sostanza, si deve trovare un valore della x che eguagliando le aree dei rettangoli ax e bx dia come loro somma c. Stando al significato geometrico che si deve dare all'uguaglianza c potrebbe intendersi come l'area di un altro rettangolo di dimensioni qualsiasi. La soluzione che veniva trovata, è caratteristica di un procedimento oggi noto come "metodo di falsa posizione" o "regola del falso". Si attribuiva al "mucchio" un valore specifico che, molto probabilmente, era un valore falso, e su questo valore assunto si eseguivano le operazioni indicate alla sinistra del segno di uguaglianza. Il risultato di queste operaioni veniva poi confrontato con il valore di destra. Quasi sempre non si ottenevano, di primo acchito, valori uguali. Si ricorreva allora a un processo iterativo basato sull'assegnazione sequenziale di valori al mucchio (o incognita x), sulla verifica empirica – per tentativi – della tenuta dell'equazione, fino a soddisfarla a meno di un errore concordemente accettato. C'è da precisare che questi tentativi degli antichi egizi venivano eseguiti soltanto con un ingegnoso utilizzo di quelle che oggi chiamiamo frazioni e perciò erano costretti a fare considerazioni molto più complicate rispetto a quelle che facciamo ai nostri giorni utilizzando, in casi del genere, i numeri decimali. Nei casi delle soluzioni di problemi della forma $ax^2 + bx = c$, cioè alla soluzione di una equazione moderna di 2° grado, oltre all'incognita moltiplicata per una costante bx, appare anche l'incognita al quadrato x^2. In questo caso si aveva la somma di un quadrato avente per lato l'incognita moltiplicata per un valore noto a e un rettangolo con una dimensione certa b e una dimensione incognita x. Il tutto doveva essere uguale a un rettangolo di prefissata area c.

Ai greci, come si legge a pag. 45 di [B.2], «si deve la scoperta dei numeri irrazionali, considerati però da un punto di vista geometrico, cioè come segmenti. Ad esempio, un'equazione del tipo $x^2 + ax = b^2$ veniva formulata così: trovare la lunghezza x di un segmento tale che, sommando l'area del quadrato costruito su questo segmento con l'area del rettangolo con base x e altezza a, si ottenga l'area di un quadrato b^2».

Una equazione moderna di secondo grado, corrispondente, per esempio, a $x^2 + (25/4) = 5x$, veniva associata al seguente problema geometrico: Trovare la lunghezza x di un segmento tale che, sommando l'area del quadrato costruito sul segmento con l'area di un quadrato assegnato avente come lato $5/2$, si ottenga l'area di un rettangolo avente i lati corrispondenti alla lunghezza del segmento x e all'altro lato che misura 5.

Lo schema è del tipo $x^2 + b^2 = a\,x$, con $a = 5$ e $b = 5 / 2$. Nell'usuale nostra indicazione in forma generale l'equazione assumerebbe la seguente struttura: $x^2 – a\,x + b^2 = 0$. Si può illustrare la procedura di risoluzione utilizzando solo i numeri decimali. Inoltre, per nostra comodità nell'eseguire i calcoli, eliminiamo il denominatore di detta equazione, trasformandola nella seguente altra equivalente: $4\,x^2 + 25 = 20\,x$.

Per $x = 1$ si ottiene la disuguaglianza $29 \neq 20$; perciò $x = 1$ non può essere la soluzione del problema. Per $x = 2$ si ottiene $41 \neq 40$; si constata già di essere molto vicini alla soluzione. Per arrivare a una risposta più precisa evidentemente si tratta di aumentare leggermente il valore della x in modo che il valore del secondo membro dell'uguaglianza tenda ad avvicinarsi a quello del primo. Con $x = 2{,}1$ si ottiene $42{,}64 \neq 42$; in questo ulteriore calcolo la differenza tende a diminuire. Ci si avvicina ancora di più con $x=2{,}2$; infatti si ottiene $44{,}36 \neq 44$. Con $x = 2{,}3$ si ottiene $46{,}16 \neq 46$; con $x = 2{,}4$ si ottiene $48{,}04 \neq 48$; con $x = 2{,}5$ si ottiene addirittura $50 = 50$, ossia un valore che soddisfa pienamente l'equazione.

Come si vede, la procedura dava pienamente i suoi frutti, anche se non sempre perveniva ad un risultato perfetto, conformemente all'esempio mostrato.

Bibliografia: [B.1] – Boyer Carl B. – *Storia della matematica*, Arnoldo Mondadori Editore – Milano, II edizione, 1982; [B.2] – Aleksandrov – Kolmogorov – Lavrent'ev, *Le matematiche – Analisi, Algebra e Geometria analitica* – Paolo Boringhieri Editore, Torino, 1974.

Punti di vista sulla conoscenza

di Luciano Corso

[*Segue dal n. 90*] Jean Baptiste Joseph Fourier (nato a Auxerre nel 1768, morto a Paris nel 1830) fu un matematico che aderì alle idee della Rivoluzione Francese. Fu professore di calcolo infinitesimale e di analisi algebrica all'Ècole Polytécnique de Paris. La sua visione sulla scienza, poneva la matematica al centro dell'interpretazione dei fenomeni naturali e dava particolare risalto a una lettura, diciamo, ondulatoria di tutte le relazioni che li governavano. In sostanza, la caratteristica degli studi di Fourier fu l'interpretazione "a onde" del mondo, cioè le regole che governano i fenomeni naturali possono essere approssimate da una composizione di seni e di coseni. Il suo punto di vista sulla conoscenza si compendia in sostanza in due linee concettuali entrambe decisive per la scienza: 1) la matematica è funzionale per la conoscenza della natura e dei suoi fenomeni; Fourier la interpretava come disciplina operativa per chiarire i processi fondamentali che governano il mondo, pur ritenendo comunque importante il suo aspetto speculativo puro per la sistemazione teorica dei suoi metodi. 2) I moti e le azioni in natura hanno un comportamen-

to ondulatorio e, anche là dove esso non è manifestamente visibile, possono essere espressi da una somma di onde elementari che ne ricostruiscono le regole [B.18].
Secondo Fourier, data una funzione $f(x)$, sotto certe condizioni, è possibile descriverla in modo preciso mediante lo sviluppo di una somma infinita di onde seno e coseno. Cioè

$$\left[y = f(x)\right] \Rightarrow \left[y = \sum_{n \geq 0} A_n \cdot sin(n \cdot x + \varphi_n)\right]$$

e quindi [B.13]

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[a_n \cdot cos(n \cdot x) + b_n \cdot sin(n \cdot x)\right]$$

Évariste Galois (nato a Bourg la Reine, Paris, nel 1811 e morto tragicamente nel 1832 a Paris) fu un matematico originale che ebbe geniali intuizioni in settori della matematica che ancor oggi fanno discutere. Come accade spesso in questo ambito disciplinare, molti matematici "primitivi" riescono a raggiungere vertici nella speculazione che lasciano increduli e spesso incomprensibilmente distratti cattedratici di fama. Le idee di Galois rimasero sostanzialmente incomprese per almeno un secolo (ancora oggi vi sono nei suoi lavori punti oscuri), anche se già allora ci fu chi capì il valore gnoseologico dei suoi scritti. La sua tragica vicenda è degna di essere ricordata come un affresco sulla povertà umana delle Istituzioni scientifiche nel cogliere la genialità quando essa si presenta in modo innovativo [B.14]. Galois fu, dal punto di vista della conoscenza, il creatore di una teoria dal forte potere unificante nei confronti di vari settori della matematica, della fisica e di altre scienze. Egli fornì uno strumento algebrico innovativo all'algebra del proprio tempo: il concetto di gruppo, tanto elementare quanto potente. A Galois va il merito di aver intuito i concetti di gruppo (di sostituzione), di sottogruppo normale e di isomorfismo tra due gruppi. A sua volta il concetto di gruppo ha stimolato la nascita di una serie di strutture algebriche quali sono i corpi, gli anelli, le algebre lineari. La teoria dei gruppi è componente base del pensiero scientifico. Ciò è un trionfo dell'astrazione. Sotto il profilo filosofico il concetto di struttura algebrica (peraltro sistemato successivamente da altri autori) rappresenta quello che nel pensiero platonico costituiva l'oggetto fondamentale della speculazione umana [B.1, *Matematicamente* n. 81]. È, infatti, il fondamento della idea unificatrice del tutto in uno. Cioè, lo stato di conoscenza e di interpretazione di quanto l'uomo può oggi sapere dei fenomeni naturali si basa su idee elementari, quali le leggi di composizione interna, con determinate proprietà, applicate a elementi di un insieme su cui lavorare e dar senso alla ricerca specialistica. Questo metodo rappresenta il patrimonio comune dei diversi saperi scientifici e matematici. [B.15]

Il concetto di struttura algebrica

Partiamo con un esempio. Si consideri l'insieme $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ e l'applicazione f definita ponendo:

$$f : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

Definiamo quindi f^{on} l'iterata n-esima della f. Le prime 3 iterate sono:

$$f^{o1} : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix};$$

$$f^{o2} : \begin{pmatrix} x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}; \quad f^{o3} : \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Si può vedere che la funzione f è iterativamente periodica di periodo n = 3. Inoltre, per ogni n, f^{on} è bijettiva e riordina gli oggetti dell'insieme X. Il calcolo combinatorio ci dice quante sono le possibili bijezioni distinte che si possono ottenere a partire dai tre oggetti dati. Considerandole tutte abbiamo l'insieme delle permutazioni $P(X)$ su 3 oggetti, dunque $|P(X)|$ =3! = 6 permutazioni. Quindi se usiamo applicazioni f di tipo bijettivo, possiamo constatare che a partire da una qualsiasi permutazione $p \in P(X)$ si ottiene ancora un'altra permutazione $p_1 \in P(X)$; cioè $P(X)$ è un insieme chiuso rispetto a f. Si potrebbe ricorrere a delle matrici per descrivere questi scambi. Queste matrici sono dette matrici di permutazione; eccole:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Queste sono costituite da 0 e 1 in modo tale che gli uno siano presenti per ogni riga e per ogni colonna solo una volta. La generica di queste matrici, A_k, opera sul vettore colonna $X^T = (x_1, x_2, x_3)^T$ mediante la regola

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che 2 qualunque di queste matrici combinate tra loro usando la moltiplicazione di matrici forniscono una matrice tra quelle date; ossia, l'insieme di queste 6 matrici è chiuso rispetto alla moltiplicazione usata. Si esprime ciò dicendo che questo insieme di matrici con l'operazione usata è una struttura algebrica. Questa struttura algebrica $\{A, \circ\}$ è un gruppo di permutazioni.
Una estensione moderna del concetto di struttura algebrica prende in considerazione un insieme di elementi qualsiasi $\boldsymbol{X}$, senza particolari proprietà, che costituiscono **il sostegno della struttura** e almeno una **legge di composizione interna** «$\circ$» che opera sugli elementi del sostegno. In simboli, una struttura minima si rappresenta nel modo seguente: $\{\boldsymbol{X}, \circ\}$. In generale, la regola di composizione «$\circ$» è di tipo n-ario. Con $n = 1$ si hanno operazioni u-narie (per esempio la negazione logica), con $n = 2$ le leggi di composizione sono di tipo binario (per esempio la somma, la moltiplicazione e la divisione sull'insieme dei reali) e così via. Quando $\{\boldsymbol{X}, \circ\}$ è costituita da una «$\circ$» che possiede la proprietà associativa, un elemento neutro e l'inverso di ogni elemento di $\boldsymbol{X}$, essa viene detta gruppo; se, inoltre, «$\circ$» è commutativa, essa è un gruppo abeliano [B.17].

Occorre dire che non tutte le strutture matematiche sono strutture algebriche. Quando consideriamo le figure piane della geometria classica e procediamo a confrontarle secondo il criterio di similitudine ci troviamo di fronte a una struttura matematica in cui distinguiamo l'insieme delle figure e il criterio per confrontarle. Questo criterio mette in relazione 2 figure date e pertanto la struttura è una struttura relazionale. Si capisce subito che è possibile avere strutture con più procedimenti o regole di confronto degli elementi. (*L. Corso*)

[*Segue al n.* 101]

Bibliografia: [B.13] V. I. Smirnov, *Corso di Matematica superiore II*, Editori Riuniti, Roma, 1977; [B.14] Évariste Galois, *Scritti matematici*, Universale Bollati Boringhieri, Torino, 2000; [B.15] Tony Rothman, *Breve storia di Évariste Galois*, Le Scienze (Scientific American), n. 166 giugno 1982, pag. 112, Milano; [B.16] L. Corso, *Sul metodo scientifico,* MatematicaMente n. 33, Settembre 2000, Mathesis VR; [B.17] Michael Artin, *Algebra*, Bollati Boringhieri, Torino, 1997; [B.18] Elena Prestini, *Un matematico freddoloso e l'effetto serra*, Lettera Matematica Pristem 55 giugno 2005 Università Bocconi, Milano