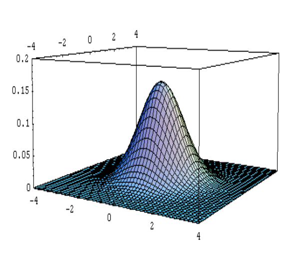
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 96 – ottobre 2005



Una richiesta a voi lettori di *MatematicaMente*

di Silvio Maracchia [1]

I cosiddetti *numeri diagonali* (d_n) *e laterali* (l_n), ben noti agli storici dell'antica matematica greca, servivano (e servono) per approssimare sempre meglio il rapporto tra la diagonale e il lato di uno stesso quadrato, quel rapporto che noi indichiamo con √2 ma che i matematici greci non sapevano indicare non avendo cognizione dei numeri irrazionali.

$$d_0 = 1 \;;\; l_0 = 0$$
$$d_n = 2\cdot l_{n-1} + d_{n-1} \qquad (1)$$
$$l_n = l_{n-1} + d_{n-1}\ .$$

Da questa definizione si hanno le successioni (per n = 1, 2, 3, 4, 5,):

d_n)	1	3	7	17	41 …
l_n)	1	2	5	12	29 …

(2)

Si noti che il rapporto d_n / l_n al crescere di n approssima sempre meglio √2 = 1,4142… con valori alternativamente per difetto e per eccesso.

L'argomento è ben noto e si trova in qualsiasi testo di storia della matematica greca. Riporto, pertanto, senza alcuna ulteriore giustificazione, le formule (3) e (4), la prima delle quali già nota ai matematici greci anche se espressa solo a parole:

$$d_n^2 = 2\, l_n^2 + (-1)^n \qquad (3)$$

da cui, per la divergenza delle successioni (2):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{l_n} = \sqrt{2}\ . \qquad (4)$$

Le formule ricorrenti (1) consentono dunque di calcolare via via i successivi valori dei numeri diagonali e laterali. Esistono però anche formule che consentono il calcolo del valore n-simo delle due successioni senza calcolare i valori precedenti:

$$d_n = \frac{1}{2}\cdot\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right] \qquad (5)$$

$$l_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right]\ . \qquad (6)$$

Per arrivare a queste due formule si prende il via dalle relazioni

$$a_n^+ = d_n + \sqrt{2}\cdot l_n \qquad (7)$$
$$a_n^- = d_n - \sqrt{2}\cdot l_n \qquad (8)$$

che possiamo scrivere nella forma compatta:

$$a_n^{\pm} = d_n \pm \sqrt{2}\cdot l_n\ . \qquad (9)$$

Sostituendo al posto dei d_n e l_n le espressioni (1), si ha:

$$a_n^{\pm} = \left(2\cdot l_{n-1} + d_{n-1}\right) \pm \sqrt{2}\cdot\left(l_{n-1} + d_{n-1}\right) =$$
$$= d_{n-1} \pm \sqrt{2}\cdot l_{n-1} \pm \sqrt{2}\cdot\left(d_{n-1} \pm \sqrt{2}\; l_{n-1}\right) =$$
$$= a_{n-1}^{\pm} \pm \sqrt{2}\cdot a_{n-1}^{\pm} = \left(1\pm\sqrt{2}\right)\cdot a_{n-1}^{\pm} =$$

[e, ripetendo la sostituzione in $a_{n-1}^{\pm} = d_{n-1} \pm \sqrt{2}\cdot l_{n-1}$]

$$= \left(1\pm\sqrt{2}\right)^2 \cdot a_{n-2}^{\pm} = \ldots = \left(1\pm\sqrt{2}\right)^n .$$

Si ha dunque, uguagliando il primo e l'ultimo membro:

$$a_n^{\pm} = \left(1\pm\sqrt{2}\right)^n \;; \qquad (10)$$

ma dalle (7) e (8) si ha, sommando e sottraendo:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(a_n^+ + a_n^-\right) = d_n \qquad (11.a)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(a_n^+ - a_n^-\right) = l_n\ . \qquad (11.b)$$

Ebbene, sostituendo le (10) nelle (11), si ottengono le due (5) e (6).

Per chiudere osservo che dalle formule (5) e (6) è possibile trarre naturalmente alcune proprietà dei numeri diagonali e laterali tra cui, con un procedimento assai simile a quello noto per i numeri di Fibonacci quello già indicato:

$$\lim_{n\to\infty} \left(d_n / l_n\right) = \sqrt{2}\ .$$

L'indicazione della (9) sino alle due formule (5) e (6) mi fu data da Giuseppe Jacopini, uno dei grandi matematici de "la Sapienza", poco prima che morisse. In quella circostanza, però, non mi disse se era una formula da lui trovata o da lui semplicemente conosciuta. Allora non ci fu tempo perché entrambi dovemmo correre a fare lezione. Ora non posso più parlagli e mi è rimasto il dubbio di come sia stato possibile, a lui o a chi per lui, *partire da quella formula* (9) [per giungere poi, come abbiamo visto, alle (5) e (6)].

Questa è la richiesta che faccio ai lettori di *MatematicaMente*: come può essere stato possibile pensare alla formula (9)?

[1] Docente di Storia della Matematica, Università degli Studi *La Sapienza* di Roma

Segnaliamo il libro

Storia dell'Algebra

di Silvio Maracchia

Edizioni Liguori Napoli, 2005, pp. VIII-639, € 48,50

GIROLAMO SACCHERI, UN PRECURSORE DELLE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

di Sandro Pistori [2]

Tutti coloro che hanno a che fare o per lavoro o per passione con le scienze matematiche conoscono più o meno approfonditamente quella vicenda che ha segnato lo sviluppo della matematica nell'800 ed è nota come "geometria non euclidea". Una autentica rivoluzione scientifica, secondo alcuni, per uno strano caso legata a personaggi che nella matematica sarebbero altrimenti passati del tutto inosservati, uno sviluppo ardito e complesso, secondo altri, che solo la mente geniale di Gauss, il "*princeps mathematicorum*" di tutti i tempi, poteva concepire e che, per strade recondite, da lui si è trasmessa ai fondatori ufficiali della materia.

Il quadro di riferimento è sufficientemente conosciuto: Il postulato euclideo delle parallele sollevò in Euclide stesso delle perplessità riguardo una sua possibile dimostrazione, mancando dell'irresistibile evidenza degli altri postulati. Infatti il geometra greco vi fece ricorso solo dopo aver dimostrato tutti i teoremi che si potevano dimostrare senza di esso, solo cioè dopo 28 proposizioni del primo libro dei suo Elementi

La storia della geometria non euclidea comincia così con gli sforzi per eliminare i dubbi intorno al postulato delle parallele. A tale fine, furono tentati due tipi di approcci. Il primo consisteva nel sostituire il postulato delle parallele con un enunciato più evidente, il secondo nel tentare di dedurlo dagli altri postulati di Euclide; se ciò fosse stato possibile, esso sarebbe diventato un teorema e tutti i dubbi sarebbero stati fugati. Nel fare questo però molti commisero errori sia nell'assumere proprietà implicite che già di per loro racchiudevano il postulato che si cercava di dimostrare, sia utilizzando argomenti logici errati.

Molti furono i matematici che più o meno testardamente si cimentarono in questi tentativi. Di questi vogliamo ricordare in questa sede Girolamo Saccheri, un gesuita di San Remo vissuto a cavallo tra il 1600 ed il 1700. Per due motivi: il primo perché animati da spirito patriottico essendo questi italiano, il secondo, di certo più rilevante, perché fu il primo a cercare la dimostrazione del postulato delle parallele mediante un ragionamento per assurdo, negando cioè il postulato stesso e cercando di giungere ad un'antinomia. Nel far questo pervenne a molti risultati che a posteriori saranno teoremi validi nelle geometrie non euclidee.

Gerolamo Saccheri (1667-1733), docente di matematica presso l'università di Pavia, dedicò pressoché tutta la vita alla ricerca della dimostrazione del V postulato di Euclide e scrisse i risultati delle sue ricerche nel trattato: *EUCLIDES AB OMNI NAEVO VINDICATUS* (Euclide liberato da ogni neo).

Saccheri era convinto di due cose:

1. che l'enunciato fosse vero;
2. che esso potesse essere dedotto dai precedenti e, quindi, diventare teorema.

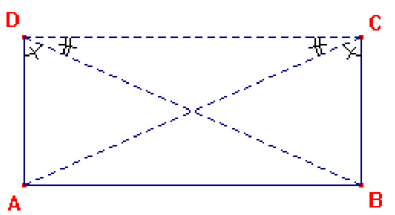
La tecnica dimostrativa da lui adottata, come già accennato, è questa:

a. supporre vera la negazione del postulato delle parallele;
b. dedurre dal nuovo sistema di assiomi (i primi quattro più la negazione del quinto) tutta una serie di teoremi loro conseguenza;
c. pervenire ad un assurdo.

Ripercorriamo per sommi capi il ragionamento da lui seguito. Saccheri utilizza il quadrilatero birettangolo isoscele [fig. 1] (quadrilatero di base AB, con i due lati BC e AD congruenti e perpendicolari ad AB) (una figura peraltro già nota in Arabia come ci è noto dall'opera di Al-Kayam). Mediante le 28 proposizioni del I libro degli *Elementi* di Euclide, senza cioè far ricorso direttamente od indirettamente al V postulato, dimostra che (la numerazione è quella originale):

TEOREMA 1: Gli angoli ai vertici superiori C e D del quadrilatero (che possiamo anche chiamare di Saccheri) sono congruenti.

fig.1



I triangoli ABC e ADB sono congruenti per il I criterio: AB in comune, $AD = BC$ per ipotesi,

$\hat{A} = \hat{B}$

per ipotesi

Allora in particolare sarà

$A\hat{C}B = B\hat{D}A$ e $AC=BD$

I triangoli ADC e BCD sono congruenti per il III criterio: $AD = BC$ per ipotesi, $AC=BD$ per dimostrazione, DC in comune. Allora in particolare

$B\hat{D}C = A\hat{C}D$

Quindi

$\hat{C} = \hat{D}$ perché somma di angoli congruenti. *CVD.*

TEOREMA 2: La retta che congiunge i punti medi di AB e di CD è perpendicolare sia ad AB che a CD.

Come si è visto nel primo, entrambi questi teoremi sono dimostrabili mediante un semplice uso dei criteri di congruenza dei triangoli (prop. 4 – 8 – 26 del I libro degli *Elementi* di Euclide).

A questo egli formula tre ipotesi possibili:

- ipotesi angolo retto (HAR): gli angoli C e D sono retti
- ipotesi angolo acuto (HAA): gli angoli C e D sono acuti
- ipotesi angolo ottuso (HAO): gli angoli C e D sono ottusi.

Sapendo che HAR è equivalente al V postulato assumendo come assiomi i primi quattro di Euclide e prima HAA e poi HAO sviluppa una serie di teoremi tra i quali cercare una contraddizione così da poter concludere che la sola ipotesi accettabile è quella HAR, ovvero, per equivalenza, quale era il suo intento, il V postulato. [*Segue al n.97*]

[2] Docente di Matematica presso l'ITP "E. Fermi" di Verona.

Che cosa possiede di speciale la matematica?

«In quanto sottoinsiemi del sistema concettuale umano, l'aritmetica e la matematica in generale sono speciali in parecchi modi. Esse sono precise, coerenti, stabili nel tempo e indipendentemente dalle comunità, comprensibili nelle varie culture, simbolizzabili, calcolabili, generalizzabili ed efficaci come strumenti generali di descrizione, spiegazione e predizione in un ampio numero di attività umane.» (George Lakoff e Rafael E. Núnez, *Da dove viene la matematica*, Bollati Boringhieri, Torino,2005, pag.83)

Somme di irrazionali

di Vincenzo Zamboni

È noto che gli insiemi numerici ***N, Z, Q, R, C*** sono ben definiti, in modo tale che ci è sempre possibile, dato un numero e uno degli insiemi citati, stabilire se il numero appartiene all'insieme, oppure no. Tuttavia, se prendiamo in esame l'insieme dei numeri irrazionali, definito da $\boldsymbol{R}\backslash\boldsymbol{Q}$, possiamo costruire dei numeri di cui è difficile dire se appartengano o no a tale insieme. È facile constatare che l'insieme degli irrazionali non è chiuso rispetto all'operazione di addizione. Ciò significa che sommando due irrazionali possiamo ottenere un altro irrazionale oppure un razionale. Otteniamo un risultato del primo tipo, per esempio, con la somma

$$\sqrt{2}+n\sqrt{2} = (n+1)\sqrt{2} \in (\boldsymbol{R}\backslash\boldsymbol{Q}) \quad , \quad n\in\boldsymbol{N}.$$

Se sommiamo $a = \sqrt{2}$ e $b = 6 - \sqrt{2}$, entrambi irrazionali, otteniamo $a + b = 6$, cioè un risultato razionale. Un metodo ancor più generale è quello di far corrispondere a un irrazionale a, un razionale a piacere s. Costruito un nuovo irrazionale $b = s - a$, si ottiene immediatamente $a + b = a + s - a = s \in \mathbf{Q}$, cioè, appunto, abbiamo ottenuto un razionale sommando due irrazionali. Ora, consideriamo il seguente caso. Sia $\pi = 3{,}14\ldots$, ed e la base dei logaritmi neperiani. La somma $s = e + \pi$ è razionale o irrazionale? Non possiamo affrontare il problema con un calcolo numerico, poiché non disponiamo di alcuna ultima cifra da cui iniziare il calcolo (per definizione, la parte decimale di un irrazionale è illimitata non periodica). Anche l'utilizzo di sviluppi in serie non sembra offrire particolari appigli per la soluzione del quesito. Come procedere dunque? L'intuito può farci sospettare che la somma di due irrazionali che sono addirittura trascendenti debba essere irrazionale, ma dimostrare la veridicità dell'ipotesi è tutt'altra cosa che enunciarla. Lo stesso problema si può riproporre per tutte le somme del tipo

$$s_{nm} = \sqrt{n} + \sqrt{m} \qquad \text{e} \qquad s_{npmq} = \sqrt{n/p} + \sqrt{m/q} \ .$$

Come dimostrare se i risultati sono razionali o irrazionali, scelti n, m, p, q interi non quadrati? Una ulteriore generalizzazione del quesito può essere data per le somme di radici n-esime di interi non potenze n-esime, o frazioni di simili interi.