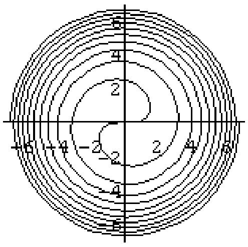
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 97 – novembre 2005



DISCRETO E CONTINUO

di Ruggero Ferro

Contare e misurare

Ci sono vari sistemi numerici, ciascuno con le sue operazioni e relazioni che sono oggetti ben diversi da sistema numerico a sistema numerico. Perché vengono chiamati tutti sistemi numerici? Una risposta che coglie aspetti importanti è quella che segue. Tutti hanno certe proprietà che permettono di utilizzarli per rappresentare e confrontare grandezze e per svolgere conti e rispondere a problemi. Queste proprietà sono le ben note proprietà formali dell'addizione, della moltiplicazione e dell'ordine. Così il possedere queste proprietà qualifica un sistema come sistema numerico. Ma io proporrei anche una diversa risposta: sono tutti in qualche modo estensioni del sistema dei numeri naturali, di cui conservano molte proprietà, estensioni costruite per affrontare problemi per i quali i numeri naturali non sono sufficienti, ma estensioni in cui i numeri naturali continuano ad esercitare un forte controllo. In questa ottica il sistema dei numeri naturali assume un ruolo centrale, di prototipo dominante, che bisognerebbe giustificare.

Di fatto i numeri naturali sono un potente strumento per contare, per rappresentare le quantità di elementi di un insieme: essi mostrano un buon funzionamento in corrispondenza delle più semplici operazioni insiemistiche e dei confronti tra quantità. Si noti che le quantità devono essere costituite da elementi indivisibili, unitari, quando le si vuole contare.

Ci sono problemi non affrontabili con i numeri naturali o perché gli elementi che costituiscono un insieme possono essere divisibili in parti (si pensi ad un insieme di torte), o perché ci sono vari tipi di quantità che interagiscono (si pensi alle quantità in avere o in dare, a quelle sopra o sotto un certo livello di riferimento). Si cerca di affrontare questi casi non risolvibili con numeri naturali, con classi di coppie ordinate di numeri naturali, cercando di definire opportunamente tali classi e le operazioni tra loro, in modo che estendano il sistema dei numeri naturali (si pensi alla costruzione dei sistemi dei numeri interi e dei numeri razionali). Una tale estensione deve permettere ancora di apprezzare quantità e di operare e di fare confronti con quantità familiari, come si fa tra i numeri naturali, ed inoltre, nei casi particolari in cui le quantità sono esprimibili con numeri naturali, gli elementi dell'estensione devono comportarsi esattamente come i numeri naturali. Ad esempio, nel caso di elementi divisibili in parti, si possono utilizzare due numeri naturali, uno che indica in quante parti uguali viene diviso ciascun elemento unitario, e l'altro che indica quante di queste parti vengono considerate, mettendo nella stessa classe di equivalenza di una coppia (m,n) coppie che indicano l'aver moltiplicato per un certo numero naturale q il numero n delle suddivisioni degli elementi unitari, ma l'avere moltiplicato per q anche il numero m delle parti considerate. L'usare coppie ordinate di naturali per la costruzione degli interi e dei razionali, lega strettamente questi sistemi numerici al sistema dei naturali, mostrando, almeno per questi sistemi numerici, il ruolo rilevante dei naturali.

Secondo me, c'è un motivo fondamentale per rifarsi il più possibile ai numeri naturali, motivo che giustifica il loro ruolo centrale, e precisamente la convinzione di conoscere bene e di dominare i numeri naturali, in quanto ciascuno di essi si può ottenere dopo un numero finito di passi a partire da zero. Così anche una coppia ordinata di numeri naturali può essere conosciuta e dominata. Detto altrimenti, siamo convinti di conoscere chiaramente cosa vuol dire duecentocinquantatre, e altrettanto siamo convinti di sapere cosa vuol dire centocinquantuno trentaquattresimi.

Una attività umana ben diversa dal contare è il misurare. Come per il contare, si misura per cogliere la grandezza di certi enti (una grandezza di un ente è una certa sua proprietà) per poterla apprezzare confrontandola con la grandezza di enti noti (cioè con proprietà dello stesso tipo di altri enti), ma le grandezze che ora si vogliono considerare non sono le quantità di elementi di un insieme, ma grandezze che si presentano in un continuo di possibilità, come ad esempio le lunghezze. Si noti che si suppone che tutte le grandezze di un certo tipo siano tra loro confrontabili, nel senso che prese due qualunque di esse o una è minore dell'altra o la seconda è minore della prima o sono uguali (tricotomia dell'ordine tra grandezze di un certo tipo). [*Segue al n. 98*]

Matematica in camicia nera.
Il regime e gli scienziati

di A. Guerraggio e P. Nastasi

Editore: Bruno Mondatori
Anno 2005 – Milano – pagine 288 – Prezzo 26 *euro*

Il volume racconta le vicende della Matematica italiana nel periodo tra le due guerre mondiali, con particolare attenzione ai rapporti con il contesto sociale e alle ripercussioni che le vicende politiche di quei decenni – cruciali nella storia del Novecento – hanno avuto sulla comunità matematica italiana.

Il prof. A. Guerraggio è docente di Matematica generale presso l'Università Bocconi di Milano e direttore della rivista «Lettera Matematica Pristem».

GIROLAMO SACCHERI, UN PRECURSORE DELLE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

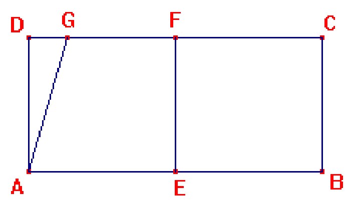
di Sandro Pistori [1]

[*Segue dal n.* 96]

TEOREMA 3: Nel quadrilatero $ABCD$ abbiamo che:

- $AB = CD$ se HAR
- $AB < CD$ se HAA
- $AB > CD$ se HAO

Fig. 2



DIM (Nel caso di HAO)

1. Consideriamo il punto medio E di AB ed F di CD

2. Per assurdo sia $AB=CD$
3. Allora $DF=AE$ e quindi $AEFD$ è un quadrilatero di Saccheri di base EF (per teor. 2)
4. Ma allora $D=A=90°$ è in contrasto con HAO
5. Per assurdo sia $AB<CD$

Fig. 3

6. Considero il punto G su CD tale che $FG=AE$ Allora
7. Allora $AEFG$ è un quadrilatero di Saccheri su base EF
8. Allora $EAG=FGA$
9. $FGA>FDA$ perché angolo esterno di un triangolo
10. Allora FGA è un angolo ottuso
11. Ma EAG deve essere anche acuto perché minore di 90° e quindi abbiamo l'assurdo.
12. Non resta che $AB > CD$. CVD

TEOREMA 9: In un triangolo ABC abbiamo che:

- somma degli angoli interni = due retti se HAR
- somma degli angoli interni < due retti se HAA
- somma degli angoli interni > due retti se HAO

DIM (nel caso HAO):

1) Sia ABC triangolo rettangolo.
2) Costruisco il quadrilatero di Saccheri di base AB
3) Allora $CD < AB$ per teorema 3
4) Quindi

$$D\hat{A}C < A\hat{C}B$$

perché a lato minore corrisponde angolo minore.

5) Quindi
6) $A\hat{B}C + B\hat{A}C + A\hat{C}B > A\hat{B}C + B\hat{A}C + D\hat{A}C = 180°$

CVD.

TEOREMA 11: In HAO se la retta BC è perpendicolare alla retta AB e la retta AD forma con la retta AB l'angolo DAB acuto, allora la retta AD e la retta BC si intersecano.

TEOREMA 13: In HAO se due rette tagliate da una traversale formano due angoli interni che hanno somma minore di un angolo piatto allora s'intersecano.

1) Sia A acuto e tale che $A + ACD < \pi$
2) Costruiamo CE perpendicolare ad AB
3) Nel Triangolo ACE, $A + X + E > \pi$ per il teorema 9
4) Per ipotesi $A + X + Y < \pi$
5) Confrontando i passi 3 e 4, $E > Y$
6) Quindi Y è acuto e per il teorema 11 CD e AB s'incontrano.

CVD

In questo teorema Saccheri trova la contraddizione che cercava. Infatti dal teorema 13 ne deriva che HAO implica il 5° postulato, equivalente a HAR. Quindi i due angoli devono essere contemporaneamente ottusi e retti, il che è assurdo
Saccheri passò poi a considerare l'ipotesi dell'angolo acuto.

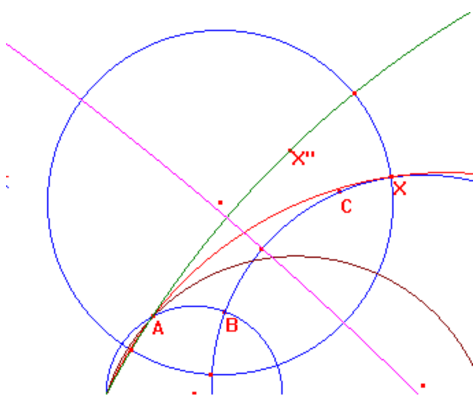


Fig. 4

Nel suo ragionare arriva a concludere che due rette qualcunque possono:

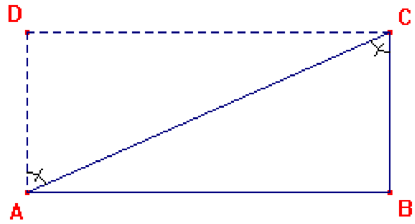
- essere secanti
- avere una perpendicolare comune
- essere asintotiche

Nel fare questo egli fa un grosso sforzo mentale nel cercare di allontanarsi dall'idea fisica di retta e non cadendo in errori, Saccheri va poi molto più in là nel suo argomentare e precisa la classificazione precedente nel modo che poi sarà ripreso da Lobachevsky. Egli infatti disse che l'ipotesi dell'angolo acuto implica che dati una retta BC e la perpendicolare AB a tale retta, esista un angolo BAX tale che:

- AX non incontra la perpendicolare BC ad AB in B
- Ogni retta compresa nell'angolo BAX incontra la perpendicolare
- Ogni retta AX'' formante con AX un angolo acuto maggiore di BAX ha una perpendicolare comune con BC

La figura 4 rappresenta la situazione nel modello di Poincarè di geometria iperbolica.

Fig. 5



Da questo risultato e da un lungo ragionamento Saccheri dedusse che le rette che lui chiama asintotiche AX e BC dovreibero avere nel loro punto d'incontro all'infinito una perpendicolare comune. Tale conclusione non è contraddizione con alcun teorema od assioma precedentemente citato, ma egli la trovò "così ripugnate e lontana dalla natura della retta" che si sentì in diritto di dire che l'ipotesi dell'angolo acuto doveva esser falsa.

Quindi l'unica ipotesi vera doveva essere quella dell'angolo retto, dalla quale come già detto si deduce che la somma degli angoli inter-ni di un triangolo è 180°, fatto equivalente al V postulato. Si considerò per-ciò giustificato nel concludere che Euclide ave-va ragione nel considera-re il suo V postulato indipendente dagli altri, e pubblicò la sua opera.

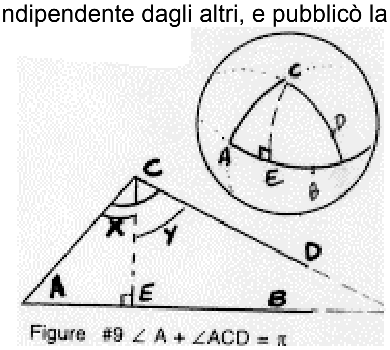


Fig.6

Tuttavia, poiché Saccheri non aveva ricavato una contraddizione da HAA, il problema dell'assioma delle parallele rimaneva aperto. A posteriori le conclusioni che possiamo trarre sono:

Se, come in letteratura si suole fare definiamo geometria neutrale la geometria di Euclide privata del V postulato, nella quale rimangono quindi vere le 28 proposizioni del I libro, allora in tale geometria sono possibili solo le ipotesi HAA o HAR e le conseguenze che da esse derivano.

HAO è effettivamente contraddittoria. Per renderla possibile occorre cambiare l'assioma delle rette di Euclide, secondo il quale un retta può essere allungata indefinitamente.

Anche se quindi Saccheri era profondamente convinto della geometria di Euclide, è comunque a ragione da considerarsi un precursore di quelle non euclidee. Infatti, solamente le conseguenze dei suoi ragionamenti ancora troppo lontane dal suo modo di pensare la geometria, producono un "dietro front" circa le conclusioni che si sarebbero potute trarre, ma i numerosi risultati ottenuti saranno poi materiale importante per le ricerche di coloro che sono ritenuti i padri fondatori della geometria non euclidea: Gauss, Lobatchevsky, Bolyai.

[1] Docente di Matematica presso l'ITP "E. Fermi" di Verona.