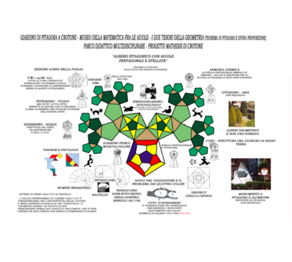
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 98 – dicembre 2005



Un lettore risponde al prof. Maracchia

di Arnaldo Vicentini [1]

Nel Nr 96 di *MatematicaMente* (ott. 2005), Silvio Maracchia, dopo aver presentato le storiche successioni di "*numeri laterali e diagonali*" l_n e d_n attraverso la legge di ricorrenza:

$$d_0 = 1 \wedge l_0 = 0; \qquad \forall n \in \boldsymbol{N}\ d_{n+1} = d_n + 2l_n \wedge l_{n+1} = d_n + l_n, \tag{1}$$

(da cui $d_1 = l_1 = 1$), ed aver ricordato che la loro legge intensiva:

$$d_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2}; \qquad l_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2} \tag{2}$$

si ottiene facilmente mediante la posizione

$$a_n^+ = d_n + \sqrt{2}\cdot l_n \wedge a_n^- = d_n - \sqrt{2}\cdot l_n \tag{3}$$

suggeritagli un tempo dal compianto prof. Giuseppe Jacopini, si chiede (e chiede ai lettori) "*come sia stato possibile a lui o a chi per lui partire dalle* (3)" per ottenere le (2).
Ora, il sistema (1) – estendendo l'indice da $\boldsymbol{N}$ a $\boldsymbol{Z}$ – definisce una coppia di «*sequenze linearmente dipendenti*» di cui ho trattato nel Nr 31 (luglio 2000) di *MatematicaMente.* Dal sistema (1) si ricava, infatti, facilmente il sistema equivalente:

$$\forall n \in \boldsymbol{Z}\ d_{n+2} - 2d_{n+1} - d_n = 0;\ d_0 = 1;\ d_1 = 1; \qquad \forall n \in \boldsymbol{Z}\ l_{n+2} - 2l_{n+1} - l_n = 0;\ l_0 = 0;\ l_1 = 1. \tag{4}$$

Questo mostra che entrambe le sequenze sono *linearmente dipendenti di ordine 2* e col medesimo *polinomio caratteristico*

$$P(x) = x^2 - 2x - 1$$

i cui zeri sono $x_1 = 1+\sqrt{2}$ ed $x_2 = 1-\sqrt{2}$.
Pertanto, la legge intensiva di entrambe d_n ed l_n è del tipo

$$\forall n \in \boldsymbol{Z}\ y_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n \tag{5}$$

dove le costanti A e B si trovano conoscendo y_0 ed y_1. Nel nostro caso si ottengono in tal modo proprio le (2). Se si pone

$$\varphi = \ln(\sqrt{2}+1), \tag{6}$$

le (2) dànno subito:

$$d_n = \frac{e^{n\varphi} + (-1)^n e^{-n\varphi}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} d_{2n} = \cosh(2n\varphi) \\ d_{2n+1} = \sinh[(2n+1)\varphi] \end{cases} \qquad \sqrt{2}\, l_n = \frac{e^{n\varphi} - (-1)^n e^{-n\varphi}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\, l_{2n} = \sinh(2n\varphi) \\ \sqrt{2}\, l_{2n+1} = \cosh[(2n+1)\varphi] \end{cases} \tag{7}$$

le quali – oltre a verificare immediatamente la proprietà:

$$\forall n \in \boldsymbol{Z}\ d_n^{\,2} = 2\, l_n^{\,2} + (-1)^n \tag{8}$$

pure menzionata dal prof. Maracchia – trasformano le (3) in:

$$a_n^+ = e^{n\varphi} = (1+\sqrt{2})^n; \quad a_n^- = (-1)^n e^{-n\varphi} = (1-\sqrt{2})^n. \tag{9}$$

Dunque, (come risulta subito dalla (5) mettendovi una volta A=1 e B=0 ed un'altra A=0 e B=1), a_n^+ ed a_n^- non sono che soluzioni particolari indipendenti della nostra equazione generale:

$$\forall n \in \boldsymbol{Z}\ y_{n+2} - 2y_{n+1} - y_n = 0.$$

Probabilmente, allora, la scelta del prof. Jacopini di introdurre le (3) per dimostrare le (2) in base alle (1) è una scelta motivata dall'esigenza didattica di giungere al risultato voluto - dare d_n ed l_n come funzioni dell'indice n - evitando l'uso di nozioni forse sconosciute agli allievi e il cui richiamo avrebbe comunque appesantito una lezione di carattere storico sui "*numeri laterali e diagonali*".

[1] Consigliere della Mathesis di Verona

William Rowan Hamilton (1805 – 1865)

di Maurizio Emaldi [2]

Quest'anno è il duecentenario della nascita di W. R. Hamilton. Nasce a Dublino. Nel 1827 è nominato professore di astronomia nel Trinità College dove è ancora studente e direttore dell'Osservatorio di Dunsink. Non ancora diciottenne incomincia a sviluppare ottica geometrica su principi estremali che anni più tardi trasporta in dinamica introducendo il principio della minima azione, la funzione caratteristica e le equazioni canoniche del moto. Dal 1837 al 1845 presiede la Royal Irish Academy. Nel 1843 fa la scoperta dei quaternioni. Muore a Dunsink.

I quaternioni costituiscono uno spazio vettoriale reale quattro-dimensionale con una base di quattro vettori speciali denotati con **1, i, j, k**. Le operazioni algebriche per calcolare con quaternioni sono le usuali operazioni vettoriali di addizione e moltiplicazione per uno scalare più un'operazione interna di moltiplicazione bilineare e associativa che è determinata dai prodotti di ogni due vettori tra **1, i, j, k** specificati come segue:

$$\mathbf{1}^2 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{1i} = \mathbf{i1} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{1j} = \mathbf{j1} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{1k} = \mathbf{k1} = \mathbf{k},$$

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{-1}, \ \mathbf{ij} = \mathbf{-ji} = \mathbf{k}, \ \mathbf{jk} = \mathbf{-kj} = \mathbf{i}, \ \mathbf{ki} = \mathbf{-ik} = \mathbf{j}.$$

Si parla di *algebra dei quaternioni di Hamilton*. Se

$$\mathbf{a} = a_0 + a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k}$$

è un quaternione non nullo, allora esso ha inverso moltiplicativo

$$\mathbf{a}^{-1} = N(\mathbf{a})^{-1}\,\mathbf{a}^*$$

dove $\mathbf{a}^* = a_0 - a_1\,\mathbf{i} - a_2\,\mathbf{j} - a_3\,\mathbf{k}$ è il coniugato di $\mathbf{a}$ e $N(\mathbf{a}) = \mathbf{aa}^*$ è la norma di $\mathbf{a}$.
Hamilton identifica il sottospazio dei quaternioni puri
$\mathbf{x} = x_1\,\mathbf{i} + x_2\,\mathbf{j} + x_3\,\mathbf{k}$
con lo spazio vettoriale tridimensionale $\boldsymbol{R}^3$ e dimostra che ogni rotazione di questo spazio è una trasformazione della forma
$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a\ x\ a}^{-1}$
dove $\mathbf{a}$ è un quaternione di norma 1.

I quaternioni di Hamilton sono il contributo algebrico importante successivo a quello dato da Galois concernente la risolvibilità mediante radicali delle equazioni algebriche: esso fa vedere che è possibile costruire sistemi di "numeri" la cui operazione di moltiplicazione non ha tutte le proprietà fino ad allora ritenute irrinunciabili. La non commutatività della moltiplicazione dei quaternioni di Hamilton ha diverse conseguenze inusuali come, per esempio, che la definizione di determinante per matrici con elementi reali o complessi non vale più per matrici con elementi che sono quaternioni:

$$det\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j}\\ \mathbf{i} & \mathbf{j}\end{pmatrix} = \mathbf{ij}-\mathbf{ji} = 2\mathbf{k}\neq 0\ ;\ det\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{i}\\ \mathbf{j} & \mathbf{j}\end{pmatrix} = \mathbf{ij}-\mathbf{ji} = 2\mathbf{k}\neq 0 .$$

[2] Docente di algebra, Università degli Studi di Padova.

ONDE PIANE UNIDIMENSIONALI

di Vincenzo Zamboni [3]

La ben nota equazione d'onda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad (1)$$

può essere risolta in modo molto elegante facendo uso di un opportuno cambiamento di variabili. Utilizziamo, per semplicità, la notazione

$$\partial_{x_i} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\ . \qquad (2)$$

Osserviamo che

$$(\partial_t - a\partial_x)(\partial_t + a\partial_x) f = \left(\partial_t^2 + a\partial_t\partial_x - a\partial_x\partial_t - a^2\partial_x^2\right) f = 0$$

e introduciamo le nuove variabili: $\{\xi = t - x/a\ ;\ \eta = t + x/a\}$ (3), sommando e sottraendo otteniamo

$$\begin{cases}\eta+\xi = 2t\\ \eta-\xi = 2x/a\end{cases} \quad da\ cui \quad \begin{cases} t = (1/2)(\eta+\xi)\\ x = (a/2)(\eta-\xi).\end{cases} \qquad (4)$$

Deriviamo, ora, la funzione $f(x(\eta,\xi)\ ,\ t(\eta,\xi))$ (5) rispetto a ξ e a η:

$$\begin{cases}\partial_\xi f = \partial_x f\,\partial_\xi x + \partial_t f\,\partial_\xi t\\ \partial_\eta f = \partial_x f\,\partial_\eta x + \partial_t f\,\partial_\eta t\end{cases} \qquad (6)$$

e deriviamo anche le relazioni (4):

$$\begin{cases}\partial_\eta x = a/2 \quad , \quad \partial_\xi x = -a/2\\ \partial_\eta t = 1/2 \quad , \quad \partial_\xi t = 1/2 \quad .\end{cases} \qquad (7)$$

Introducendo le (7) nelle (6) otteniamo:

$$\begin{cases}\partial_\xi f = -\frac{a}{2}\partial_x f + \frac{1}{2}\partial_t f = \frac{1}{2}(\partial_t - a\partial_x) f\\ \partial_\eta f = \ \frac{a}{2}\partial_x f + \frac{1}{2}\partial_t f = \frac{1}{2}(\partial_t + a\partial_x) f\end{cases} \qquad (8)$$

da cui la relazione

$$\begin{cases}(\partial_t - a\,\partial_x) = 2\partial_\xi\\ (\partial_t + a\,\partial_x) = 2\partial_\eta\ .\end{cases} \qquad (9)$$

Allora, la (1) può essere riscritta come:

$$\left(\partial_t^2 - a^2\partial_x^2\right) f = (\partial_t - a\,\partial_x)(\partial_t + a\,\partial_x) f = 2\cdot 2\,\partial_\xi\partial_\eta f = 0$$

ovvero

$$\partial^2 f/\partial\xi\partial\eta = 0\ . \qquad (11)$$

Posta l'equazione in questa forma, è evidente che le sue soluzioni saranno tutte e sole le funzioni del tipo:

$$f(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)\ . \qquad (12)$$

Infatti, dipendendo f_1 e f_2 ciascuna da una sola delle variabili $(\xi\ ,\ \eta)$, quando le si derivi rispetto a entrambe, si otterrà zero:

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\cdot\partial\eta}\left(f_1(\xi) + f_2(\eta)\right) = \frac{\partial}{\partial\eta} f_1{}'(\xi) + \frac{\partial}{\partial\xi} f_2{}'(\eta) = 0 \qquad (13)$$

Reintroducendo nella (12) le variabili originali $(x,\ t)$, si ottiene:

$$f(x,t) = f_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{a}\right)\ . \qquad (14)$$

Abbiamo ottenuto, cioè, le onde piane, che si propagano nel verso positivo f_1 e negativo f_2 dell'asse x.

Il motivo di questo breve scritto è che la presente deduzione della soluzione in onde piane mi sembra logicamente semplice ed essenzialmente elegante.

Bibliografia: [B.1] Lev Landau, Teoria dei campi, Editori Riuniti, Roma, 1976; [B.2] Nikolaj Piskunov, Calcolo differenziale e integrale, Editori Riuniti, Roma, 2004; [B.3]] Aleksandr Kiteigorodsky, Introduction to Physics, Mir, Mosca, 1976.

[3] Docente di fisica in quel di Verona.

DISCRETO E CONTINUO

di Ruggero Ferro [4]

[*Segue dal n. 97*] A grandi linee, per continuo di possibilità si intende che per passare da una grandezza più piccola ad una più grande se ne incontrano tante altre senza interruzioni, senza che ci siano salti. Questa situazione è in contrasto con la discontinuità tipica dei numeri naturali. Infatti la proprietà che caratterizza la discontinuità (per ciascun numero naturale ne esiste un altro più grande, il suo immediato successore, tale che non ci sia alcun altro numero naturale strettamente compreso tra i due) non può valere in un continuo di possibilità perché presenterebbe un salto tra una grandezza e quella che la segue immediatamente. Di fatto in un continuo di possibilità di sicuro deve valere la negazione della proprietà appena esposta della discontinuità, negazione che può essere enunciata come segue: tra una prima grandezza ed una seconda più grande ci deve essere sempre una terza strettamente inclusa tra le due (un ordinamento con questa caratteristica viene detto <u>denso</u>), anche se questa proprietà non dice tutto della continuità del sistema di possibili grandezze, come si vedrà in seguito.

Dopo questa prima analisi breve e superficiale di quali grandezze di enti si intendono misurare, è naturale domandarsi come si misura, cioè come confrontare grandezze di un certo tipo con altre dello stesso tipo, e magari con alcune tra queste di cui si ha dimestichezza. Le modalità del confronto tra grandezze geometriche è uno degli interessi della geometria, mentre per le grandezze non geometriche le relative discipline studiano come confrontare le grandezze. Questi studi forniscono indicazioni su quando si devono considerare uguali le grandezze di due enti, o quando una debba essere considerata minore od uguale di un'altra, o quando ancora tra due ci sia un determinato rapporto (che non necessariamente è un numero), come fa la geometria con la sua teoria delle proporzioni.

Non è qui il momento di introdurre e studiare i modi di confrontare grandezze, che invece vengono dati per noti. Piuttosto si è interessati ad eseguire tali confronti quando una delle due grandezze di un certo tipo è nota, familiare e considerata come campione di confronto per quel tipo di grandezze. La grandezza scelta come campione per un certo tipo di grandezze viene detta <u>unità di misura</u> di quel tipo di grandezze. Di fatto misurare vuol proprio dire confrontare con una tale grandezza campione, cioè confrontare con l'unità di misura.

Si misura nella convinzione che si possano confrontare due qualsiasi grandezze dello stesso tipo confrontando i loro rapporti con la grandezza campione, grazie alla transitività delle relazioni di uguaglianza e d'ordine. [*Segue al n. 99*]

[4] Docente di Logica Matematica, Università degli Studi di Verona